UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag for: FYS2140, Kvantefysikk

Eksamensdag: Tirsdag 13. juni 2017

Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling", Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter" eller Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter". Godkjent kalkulator. Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket).

Oppgave 1: Blandede, kvalitative spørsmål

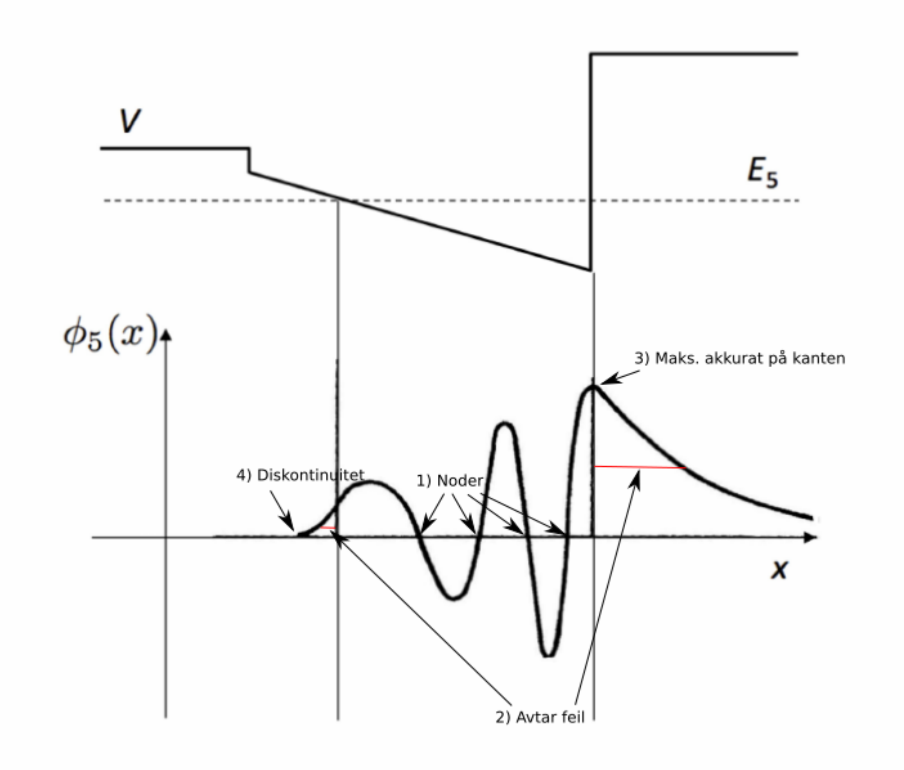
a) (5 poeng) Identiske bosoner. Bølgefunksjonen må være normert og *symmetrisk* under ombytte av partikkel-koordinatene. F.eks: $\Psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)$ eller $\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right)$.

b) (5 poeng) Identiske fermioner. Bølgefunksjonen må være normert og *antisymmetrisk* under ombytte av partikkel-koordinatene. F.eks: $\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right)$.

c) (5 poeng) Bare skillbare partikler. For at bølgefunksjonen ikke også skal kunne beskrive identiske fermioner eller bosoner kan den ikke være symmetrisk eller antisymmetrisk under ombytte av partikkel-koordinatene. Så normerte bølgefunksjoner som *bare* beskriver skillbare partikler er f.eks.: $\Psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ eller $\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \sqrt{2}\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right]$.

d) (3 poeng) (2)

e) (3 poeng) (1),(2) og (3)



Figur 1: Påstått bølgefunksjon. Pilene markerer kvalitative feil.

f) (5 poeng) Følgende er ikke engang kvalitativt riktig: 1) Det er kun 4 noder, det skulle vært 5. 2) Bølgefunksjonen burde avta fortere med x under barrieren på høyre side enn den gjør på venstre fordi potensialet er større på høyre side. 3) Bølgefunksjonen kan ikke ha et maksimum på kanten der potensialet går over til å falle eksponensielt. Et slikt maksimum akkurat på kanten impliserer at den deriverte av bølgefunksjonen er diskontinuerlig, noe den ikke kan være for dette potensialet. 4) Den deriverte av bølgefunksjonen og bølgefunksjonen selv burde være kontinuerlig for dette potensialet, men det ser de ikke ut til å være der bølgefunksjonen plutselig faller ned til 0.

g) (3 poeng) Veilengdeforskjellen fra de to spaltene til det 4. minimumet er $\Delta s = \underline{\frac{7}{2}\lambda}$ der $\underline{\lambda = \frac{h}{mv}}$ er elektronets de Broglie bølgelengde.

Oppgave 2: Partikkel på sirkel

a) (5 poeng) Nei, $\psi(0) = -\psi(L)$ og kontinuitet tvinger bølgefunksjonen til å være 0 ved $x = 0$. Dette valget skiller derfor ut $x = 0 (x = L)$ som et spesielt punkt på sirkelen der bølgefunksjonen alltid er null.

b) (5 poeng) Riktig randbetingelse: $\psi(0) = \psi(L)$ og $\frac{d\psi}{dx}(0) = \frac{d\psi}{dx}(L)$. Fri partikkel, generell løsning: $\psi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$, med energier $E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ (ses ved å sette inn i Schrødinger-ligningen). Randbetingelsen: $\psi(0) = \psi(L) \implies Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = A + B$ må holde for vilkårlige A og B. Det samme gjelder randbetingelsen for den deriverte: $Ae^{-ikL} - Be^{ikL} = A - B$. Derfor må $e^{\pm ikL} = 1 \implies k = \frac{2\pi}{L}n$ der $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dette gir energiegenverdiene $\underline{E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2}$ og energiegenfunksjonene $\underline{\psi_n(x) = Ae^{-i\frac{2\pi}{L}nx} + Be^{i\frac{2\pi}{L}nx}}$. Normering gir $|A|^2 + |B|^2 = \frac{1}{L}$. Ettersom vi har to konstanter (A og B), og eksponensialfunksjonene er lineært uavhengige for $n \neq 0$, så har energinivåene degenerasjonsgrad $\underline{2}$. (Det er flere måter å skrive ned en basis for disse. Ofte velger man eksponensialfunksjonene selv som basis $\{\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}, \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}nx}\}$. Fordelen med dette valget er at eksponensialfunksjonene også er egentilstander for $\hat{p}_x$. Men man kan også velge lineærkombinasjoner av disse, f.eks. $\{\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right), \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)\}$ som er egentilstander for paritetsoperatoren, $x \to -x$.) For $n = 0$ er begge eksponensialfunksjonene 1, altså er de lineært avhengige, og det er kun én bølgefunksjon $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Degenerasjonsgraden for $n = 0$ er derfor $\underline{1}$.

Oppsummert er derfor energiegenfunksjonene $\underline{\psi_z(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i2\pi zx/L}}$ med energier $\underline{E_z = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 z^2}$, $z \in Z$. For $z = 0$ er degenerasjonen $\underline{1}$, mens for alle andre z er degenerasjonen $\underline{2}$ (z og $-z$ har samme energi).

c) (5 poeng) Direkte utregning gir:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = p\psi(x) \implies \frac{\partial}{\partial x}\ln(\psi) = \frac{ip}{\hbar} \implies \ln(\psi) = \frac{ip}{\hbar}x + \ln A \implies \psi(x) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

Randbetingelsen: $\psi(0) = \psi(L) \implies A = Ae^{i\frac{p}{\hbar}L} \implies \underline{p = \hbar\frac{2\pi}{L}z, z \in Z}$.

(Alternativt kan man bruke at siden $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ så er $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$ og dermed har $\hat{H}$ og $\hat{p}_x$ et felles sett av egenfunksjoner. Siden spektret til $\hat{H}$ er degenerert (for $z \neq 0$) så kan en generell energiegenfunksjon skrives $\psi_{E_z}(x) = Ae^{i\frac{2\pi}{L}zx} + Be^{-i\frac{2\pi}{L}zx}$.

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{E_z} = \frac{\hbar}{i}\frac{2\pi i}{L}z\left(Ae^{i\frac{2\pi}{L}zx} - Be^{-i\frac{2\pi}{L}zx}\right) = p\left(Ae^{i\frac{2\pi}{L}zx} + Be^{-i\frac{2\pi}{L}zx}\right)$$

For at denne også skal være en egenfunksjon for $\hat{p}_x$ så må enten $A = 0$ (gir egenverdi $-\hbar\frac{2\pi}{L}z$) eller $B = 0$ (gir egenverdi $+\hbar\frac{2\pi}{L}z$). Altså samme svar som ved den direkte utregningen.)

d) (5 poeng) Vilkårlig energi- og bevegelsesmengde-egentilstand: $\psi_z(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}zx}$,

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi}{L}zx}x^2e^{i\frac{2\pi}{L}zx} = \frac{1}{L}\int_0^L dx x^2 = \frac{L^2}{3}$$
$$\langle x\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi}{L}zx}xe^{i\frac{2\pi}{L}zx} = \frac{1}{L}\int_0^L dx x = \frac{L}{2}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{L^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{L^2}{12}}.$$

Antar $(\Delta p)^2 = p^2 = \hbar^2\left(\frac{2\pi z}{L}\right)^2$. Da blir $(\Delta p)(\Delta x) = \underline{\hbar\frac{\pi}{\sqrt{3}}|z|} > \frac{\hbar}{2}$ for alle $z \neq 0$.

e) (5 poeng) Forklaring: En initialtilstand kan være en vilkårlig normaliserbar funksjon. Normeringskravet er $\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$. Dette gir

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = |A|^2\int_0^L x^2(L-x)^2 dx = |A|^2\left(L^2\int_0^L x^2 - 2L\int_0^L x^3 dx + \int_0^L x^4 dx\right)$$
$$= |A|^2\left(\frac{L^5}{3} - \frac{2L^5}{4} + \frac{L^5}{5}\right) = |A|^2\frac{L^5}{30} = 1 \qquad \Longrightarrow \underline{A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}}.$$

f) (5 poeng)

$$\langle\hat{p}_x\rangle = |A|^2\int_0^L dx x(L-x)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x(L-x) = |A|^2\frac{\hbar}{i}\int_0^L dx x(L-x)(L-2x)$$
$$= |A|^2\frac{\hbar}{i}\int_0^L dx x(L^2 - 3xL + 2x^2) = |A|^2\frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{2}L^4 - \frac{3}{3}L^4 + \frac{2}{4}L^4\right) = 0.$$

Tidsutvikling for observabel der tilhørende operator ikke eksplisitt avhenger av tiden: $\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_x\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{H}, \hat{p}_x\right]\rangle$. Ettersom Hamiltonoperatoren er $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}$, så er $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$. Derfor vil $\frac{d}{dt}\langle\hat{p}_x\rangle = 0$, og $\langle\hat{p}_x\rangle$ vil forbli den samme verdien (0) når t øker.

Oppgave 3: Hydrogenatomet

Bølgefunksjon:

$$\Psi(\vec{r},0) = A\left(3i\phi_{100} - 4\phi_{211} - i\phi_{210} + 10\phi_{21-1}\right).$$

a) (2 poeng)

$$\int d\vec{r}|\Psi(\vec{r})|^2 = |A|^2 \int d\vec{r}\left(-3i\phi_{100}^* - 4\phi_{211}^* + i\phi_{210}^* + 10\phi_{21-1}^*\right)\left(3i\phi_{100} - 4\phi_{211} - i\phi_{210} + 10\phi_{21-1}\right)$$

$$= |A|^2\left(|3i|^2 + |-4|^2 + |-i|^2 + |10|^2\right) = 126|A|^2 \implies A = \frac{1}{\sqrt{126}} = \underline{\frac{1}{3\sqrt{14}}}$$

alle kryssleddene forsvinner fordi ϕ_{nlm} er ortogonale funksjoner.

b) (5 poeng) Energien avhenger kun av kvantetallet n, så derfor er bølgefunksjonen ved tiden t

$$\underline{\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{126}}\left[3i\phi_{100}e^{-iE_1t/\hbar} + \left(-4\phi_{211} - i\phi_{210} + 10\phi_{21-1}\right)e^{-iE_2t/\hbar}\right]}$$

der $E_2 = E_1/4$ fordi $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ $(E_1 < 0)$.

c) (5 poeng) Det er to mulige måleresultater, enten E_1 eller E_2. Sannsynlighetene for disse finnes fra koeffisientene foran de respektive egenfunksjonene. Forventningsverdien blir da

$$\langle E\rangle = \frac{1}{126}\left(|3i|^2E_1 + (|-4|^2 + |-i|^2 + |10|^2)E_2\right) = \frac{1}{126}\left(9E_1 + 117\frac{E_1}{4}\right) = \frac{153}{504}E_1$$
$$= \underline{\frac{17}{56}E_1} \approx 0.3036E_1$$

d) (5 poeng)

$$\langle L^2\rangle = \frac{1}{126}\left(|-4|^2 + |-i|^2 + |10|^2\right)\hbar^2 1(1+1) = \frac{117}{126}2\hbar^2 = \underline{\frac{13}{7}\hbar^2} \approx 1.8571\hbar^2$$

e) (5 poeng)

$$\langle L_z\rangle = \frac{1}{126}\left(|-4|^2\hbar - |10|^2\hbar\right) = -\frac{84}{126}\hbar = \underline{-\frac{2}{3}\hbar}$$

f) (5 poeng) $\langle E\rangle$ er konstant fordi Hamiltonoperatoren H ikke avhenger av tiden. $\langle L_z\rangle$ og $\langle L^2\rangle$ er også konstante siden begge operatorene ikke er eksplisitt tidsavhengige og fordi de kommuterer med H. Vi står da kun tilbake med $\underline{\langle\vec{r}\rangle}$. Denne vil variere med tiden fordi posisjonsoperatorene ikke kommuterer med H.