Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: 9. juni 2022

Definisjoner (som eventuelt kan være nyttige):
m_e = elektronets masse
c = lyshastigheten
$\hbar = h/2\pi$, der h er Plancks konstant
$k = e^2/4\pi\varepsilon_0 = \hbar^2/m_e a_0$ er Coulombfaktoren
$a_0 = \hbar^2/m_e k \approx 0.053\,\text{nm}$ er Bohrradius

Formler (som eventuelt kan være nyttige):
$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v|_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$

$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\,dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$ og $Re(\beta) > 0$

$\frac{d}{dx}\sin(\beta x) = \beta\cos(\beta x)$
$\frac{d}{dx}\cos(\beta x) = -\beta\sin(\beta x)$

$\int \sin(\beta x)\,dx = -\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)$
$\int \cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$
$\int \sin^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x)$
$\int \cos^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x)$

$\int x\sin(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^2}\{\sin(\beta x) - \beta x\cos(\beta x)\}$
$\int x\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^2}\{\cos(\beta x) + \beta x\sin(\beta x)\}$
$\int x^2\sin(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^3}\{2x\beta\sin(\beta x) + (2 - \beta^2 x^2)\cos(\beta x)\}$
$\int x^2\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^3}\{2x\beta\cos(\beta x) - (2 - \beta^2 x^2)\sin(\beta x)\}$
$\int x^2\sin^2(\beta x)\,dx = \frac{1}{24\beta^3}\{4\beta^3 x^3 + (3 - 6\beta^2 x^2)\sin(2\beta x) - 6\beta x\cos(2\beta x)\}$
$\int x^2\cos^2(\beta x)\,dx = \frac{1}{24\beta^3}\{4\beta^3 x^3 - (3 - 6\beta^2 x^2)\sin(2\beta x) + 6\beta x\cos(2\beta x)\}$

Oppgave 1 Heisenbergs uskarphetsrelasjon

a) Forklar hva Heisenbergs uskarphetsrelasjon betyr for måling på posisjon og bevegelsesmengde.

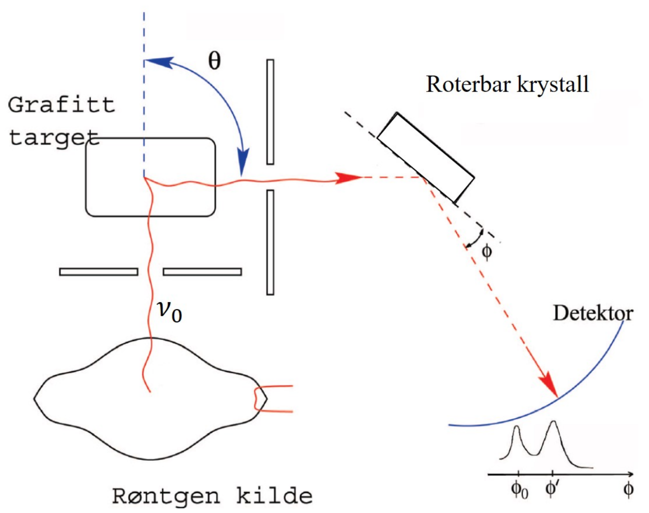
Svar: Vi ikke kan lokalisere en partikkel *og samtidig* bestemme dens bevegelsesmengde til en vilkårlig presisjon. Alternativ: statistisk for målinger på mange partikler, preparerte på samme måte, gir at hvis uskarpheten (standardavviket) er liten ved måling av posisjon så er uskarpheten (standardavviket) stor for måling av posisjon, og omvendt.

b) Relater diskusjonen i forrige deloppgave til bredden på en bølgepakke som inneholder planbølger med forskjellige frekvenser. Hvordan skal bølgepakken se ut for å få liten spredning i verdiene ved måling på bevegelsesmengde?

Svar: Bredden på bølgepakken må være stor. Antallet planbølger vil generelt ikke si noe om spredning.

Oppgave 2 Compton-spredning

I denne oppgaven skal du forklare resultatene fra Compton-spredning; se Figur 1. Elektromagnetisk stråling med en gitt frekvens ν_0 treffer grafittplaten og blir spredt med spredningsvinkelen θ. Detektoren viser den spredte strålingens intensitet som funksjon av vinkelen ϕ på den roterbare krystallen.



Figur 1: Oppsett for Comptons forsøk.

a) Forklar hvordan eksperimentet viser at elektromagnetisk stråling kan tilordnes både partikkel- og bølgeegenskaper.

Svar: Endring i bølgelengde (eller bevegelsesmengden) etter interaksjon i grafittplaten kan beskrives som en elastisk støt mellom to klassike partikler/kuler; det viser at elektromagnetisk stråling kan tilordnes partikkel-egenskaper. Interferensemønster pga. Braggdiffraksjon i den roterbare krystallen viser at strålingen har bølgeegenskaper.

b) Forklar hvorfor detektoren oppviser to topper, der vinkelen ϕ_0 for ene toppen er nesten helt uavhengig av spredningsvinkelen θ, mens vinkelen ϕ' for andre toppen er tydelig avhengig av θ.

Svar: Støt mellom et foton og et (nesten) fritt elektron med liten masse årsaker stor endring i bølgelengden til fotonet. Det vises som en intensitet-topp med tydelig avhengig av θ. Støt mellom et foton og et tungt atom årsaker liten endring i bølgelengden til fotonet. Det vises som en intensitet-topp som er nesten helt uavhengig av θ.

Oppgave 3 Superposisjon

I denne oppgaven skal du studere en superposisjon av egentilstandene for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn, slik den var definert i midtveiseksamen:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for} -a < x < a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Løsningene til den tidsuavhengige Schrödingerligningen er

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 1, 3, 5, ...\infty \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 2, 4, 6, ...\infty, \end{cases} \tag{2}$$

med energiene $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}n^2$. Bredden på bønnen er $a = 0.614\,\text{nm}$.

Anta nå at du har preparert et elektron i en tilstand med bølgefunksjonen $\psi(x) = A \cdot (a^2 - x^2)$ i potensialbrønnen.

a) Bestem A.
Svar: $1 = A^2 \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 dx = 2A^2 \int_0^a (a^4 + x^4 - 2a^2x^2) dr$
$= 2A^2(a^4x + x^5/5 - 2a^2x^3/3)|_0^a = 2A^2(a^5 + a^5/5 - 2a^5/3) = 16A^2a^5/15$
$\Rightarrow A = \sqrt{15/16a^5}$.

b) Du gjør en energimåling på $\psi(x)$. Beregn sannsynligheten for at du måler energien til grunntilstanden.

Svar: $c_n = \int \psi_n(x)^* \, \psi(x)\, dx$. Bruk formler på side 2. Med $\beta = n\pi/2a$ og $n = 1$ er $\cos(\beta a) = \sin(\beta 0) = 0$ og $\cos(\beta 0) = \sin(\beta a) = 1$.

$c_1 = \int_{-a}^{a} A \cdot (a^2 - x^2)\,(1/\sqrt{a})\cos(\beta x)\, dx = (\sqrt{15}\, a^{-3}/4) \cdot (I_1 - I_2)$, der
$I_1 = 2a^2 \int_0^a \cos(\beta x) dx = 2a^2 \beta^{-1} \sin(\beta x)|_0^a = (4a^3/\pi)(1+0) = 4a^3/\pi$, og
$I_2 = 2\int_0^a x^2 \cos(\beta x) dx = 2\beta^{-3}(2x\beta\cos(\beta x) - (2 - \beta^2 x^2)\sin(\beta x)\,)|_0^a =$
$= (16a^3/\pi^3)(0 - (2 - \pi^2/4) - 0 - 0) = -32a^3/\pi^3 + 4a^3/\pi$.
$c_1 = (\sqrt{15}\, a^{-3}/4) \cdot (32a^3/\pi^3) = 8\sqrt{15}/\pi^3 \approx 0.9993 \qquad \Rightarrow |c_1|^2 \approx 0.9986.$

Oppgave 4 Hydrogenatomet

Energi-egentilstander for hydrogenatomet er $\psi_{nlm_l} = R_{nl}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$ med energi E_n. Radialdelen $R_{nl}(r)$ kan bestemmes av den modulerte radielle Schrödinger-ligningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k}{r} + \frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{nl}(r) = E_n u_{nl}(r)\,, \tag{3}$$

der $u_{nl}(r) = r \cdot R_{nl}(r)$.

a) Grunntilstanden er på formen $R_{10}(r) = A \cdot e^{-\gamma r}$, der A er normeringskonstanten. Bestem γ og energien E_1 gjennom å sette inn tilsvarende funksjon $u_{10}(r)$ i ligning 3. (Du skal ikke beregne verdiene på γ og E_1.)
Hint: Bruk gjerne definisjoner på k og a_0 fra side 2.

Svar: $u_{10} = Are^{-\gamma r}$, $l = 0$ og sett $\hbar^2/2m_e = C$.
Dobbelt-derivasjonen på $u_{10}(r)$ gir at Schrödinger-ligningen blir:
$-C\,(0 + 2(-\gamma) + r(-\gamma)^2)e^{-\gamma r} - ke^{-\gamma r} = E_1 re^{-\gamma r}$.
Dette skal være sant for alle r, og det betyr (se oblig 9):
$\gamma = k/2C = 1/a_0$, og $E_1 = -C\gamma^2 = -\hbar^2/2m_e a_0^2$.

b) Normering av $R_{10}(r)$ gir $A = 2/a_0^{3/2}$. Beregn forventningsverdi $\langle r \rangle$ og standardavvik σ_r for den radielle posisjonen. Oppgi verdiene i nm.

Svar: Med $\beta = 2\gamma = 2/a_0$ får vi
$\langle r \rangle = \int R_{10}^* r R_{10}\, r^2\, dr = (4/a_0^3) \int r^3 e^{-\beta r}\, dr = (4/a_0^3)(3!/\beta^4) = 3a_0/2 \approx 0.080\,\text{nm}$.
$\langle r^2 \rangle = (4/a_0^3) \int r^4 e^{-\beta r}\, dr = (4/a_0^3)(4!/\beta^5) = 4a_0^2(4!/2^5) = 3a_0^2$.
$\sigma_r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = a_0\sqrt{3 - 9/4} = a_0\sqrt{3}/2 \approx 0.046\,\text{nm}$.

Oppgave 5 Angulærmoment

I denne oppgaven skal du studere angulærmomentet til et elektron i hydrogenatomet. Energi-egentilstandene ψ_{nlm_l} er også egenfunksjoner til egenverdi-ligningene:

$$\hat{L}^2\,\psi_{nlm_l} = \hbar^2 l(l+1)\,\psi_{nlm_l}$$
$$\hat{L}_z\,\psi_{nlm_l} = \hbar m_l\,\psi_{nlm_l}$$

a) Hvilke verdier kan l og m_l ha for et gitt hovedkvantetall n? Vis at kvadratet av egenverdien til $\hat{L}_z$ ikke er større enn egenverdien til $\hat{L}^2$.

Svar: $l = 0, 1, , ...n-1$ og $m_l = -l, -l+1, ..., l$.
Maks absoluttverdi på m_l er l. Det gir $(\hbar m_l)^2 \leq \hbar^2 l^2 \leq \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l = \hbar^2 l(l+l)$.
Likhet gjelder for $l = 0$, for da er også $m_l = 0$.

b) Anta at du har et elektron i følgende degenererte tilstand i det andre energinivået, det vil si, $n = 2$:

$$\psi = A \sum_{l} \sum_{m_l} \psi_{2lm_l} \qquad \text{der } m_l \geq 0, \tag{4}$$

det vil si, med bidrag fra alle tilgjengelige l og alle tilgjengelige ikke-negative verdier på m_l. Bestem A.

Svar: $1 = \int \psi^*\psi\, dr = A^2 \sum_{l,m_l} \sum_{l',m_l'} \int \psi^*_{2lm_l}\psi_{2l'm_l'}\, dr = /\text{ortonormale}/ =$
$A^2 \sum_{l,m_l} \sum_{l',m_l'} \delta_{ll'}\delta_{mm_l'} = A^2 \sum_{l,m_l} 1 = A^2 \cdot 3 \qquad \Rightarrow A = 1/\sqrt{3}$.
Alternativ løsning fra $\sum |c_n|^2 = 1$. Tre tilstander, alle med $c_n = A$.

c) Bestem forventningsverdiene for $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ til ψ i forrige deloppgave.

Svar: $\hat{Q} = \hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$, og bruk ortonormalitet på samme måte som i b).
$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi dr = A^2 \sum_{l,m_l} \sum_{l',m_l'} \int \psi^*_{2lm_l} \hat{Q} \psi_{2l'm_l'} dr = (1/3) \sum_{l,m_l} q_{l,m_l}$.
$\langle L^2 \rangle = (1/3)\hbar^2(0+2+2) = 4\hbar^2/3$.
$\langle L_z \rangle = (1/3)\hbar(0+0+1) = \hbar/3$.

Alternativ løsning ved å direkte bruke $\langle Q \rangle = \sum q_n \cdot |c_n|^2$.

Oppgave 6 To-partikkel-system

Bølgefunksjonen for et enkelt elektron i tilstand a og med spinn-projeksjon m_s på z-aksen kan skrives som $\psi_a(\mathbf{r})\chi_{m_s}(s)$. Alternativt kan du skrive spinn-tilstanden som $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$. I denne oppgaven skal du beskrive en bølgefunksjon for to elektroner.

a) Skriv ned to-elektron-bølgefunksjonen der spinn-delen er triplett-tilstanden med $m_s(s_1) + m_s(s_2) = 0$. Det vil si, summen av de to elektronenes spinn-projeksjon på z-aksen skal være null.

Svar $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2) =$
$\frac{1}{2}(\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2))(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$
eller
$\frac{1}{2}(\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2))(\chi_{1/2}(s_1)\chi_{-1/2}(s_2) + \chi_{-1/2}(s_1)\chi_{1/2}(s_2))$

b) Er rom-delen til bølgefunksjonen i a) symmetrisk eller antisymmetrisk? Begrunn svaret.

Svar: elektroner er fermioner, og totale bølgefunksjon må være antisymmetrisk. Da triplett-tilstanden er symmetrisk må rom-delen være antisymmetrisk.

c) Vis at din to-elektron-bølgefunksjon er antisymmetrisk.

Svar: $\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, s_2, s_1) =$
$\frac{1}{2}(\psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1) - \psi_b(\mathbf{r}_2)\psi_a(\mathbf{r}_1))(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) =$
$-\frac{1}{2}(\psi_b(\mathbf{r}_2)\psi_a(\mathbf{r}_1) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1))(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) =$
$-\frac{1}{2}(\psi_a(\mathbf{r}_1\psi_b(\mathbf{r}_2)) - \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2))(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = -\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2)$

Sensorveiledning for avsluttende eksamen
FYS2140 Vår 2022

Til denne sensurveiledning er det laget et detaljert løsningsforslag som utgjør en viktig del av poengsettingen. Alle oppgaver blir rettet av to lærere/fagpersoner.

Oppgavene rettes med disse maksimale poeng per deloppgave:

1a 2	**2a 3**	**3a 4**	**4a 5**	**5a 3**	**6a 3**
1b 2	**2b 4**	**3b 6**	**4b 6**	**5b 4**	**6b 2**
				5c 4	**6c 4**

Totalt er dette 52 poeng som skal tilsvare 80% av totalkarakter på kurset (midtveiseksamen teller 20%). Vi vil derfor gange poengene som gis med faktoren 80/52.

- Det gis null poeng på deloppgaver hvis den ikke er besvart eller at besvarelsen ikke er relevant.
- Det gis fullt poeng på deloppgaver hvis det er i henhold til løsningsforslaget eller løst på annen fornuftig måte. Det skal ikke trekkes poeng hvis besvarelsen er besvart ved hjelp av matematisk/numerisk bevis, selv om det er uttrykt i oppgaveteksten «vis (uten regning) at så og så…» eller liknende.
- Det gis 1/3 ≈ 30% av fullt poeng hvis kandidaten er noe på vei mot riktig svar.
- Det gis 2/3 ≈ 70% av fullt poeng hvis kandidaten er nesten helt framme eller slurvefeil.
- Det gis 1/2 = 50% av fullt poeng hvis deloppgaven er halvferdig besvart.
- Det gis tilnærmet fullt poeng hvis tankemåten er riktig, men følgefeil.
- Det gis ikke tilleggspoeng for tilleggstekst som ikke er relevant for spørsmålet, selv om tekstens innhold er riktig isolert sett.
- Hvis det leveres tilleggstekst som det ikke ble spurt om og som avslører manglene innsikt, gis 90% av foreslått poeng.