Oppgave 1: Harmonisk oscillator

I denne oppgaven skal vi studere en partikkel med masse m i et en-dimensjonalt harmonisk oscillator potensial, beskrevet ved Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

a) Vis at bølgefunksjonen

$$\psi(x) = Ne^{-\gamma x^2} \tag{2}$$

er en egenfunksjon til $\hat{H}$ for en bestemt verdi av γ og beregn γ uttrykt ved frekvensen ω. N er en normeringskonstant.

b) Bestem (ved utregning) hvilken verdi på energikvantetallet n tilstanden ψ tilsvarer.
Beregn normeringskonstanten N.

Ved et tidspunkt ($t = 0$) forandres systemets potensielle energi momentant, slik at det nye potensialet er

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}m(4\omega)^2 x^2 \tag{3}$$

med tilhørende Hamiltonoperator.

c) Skriv ned grunntilstanden (både bølgefunksjonen $\tilde{\psi}_0(x)$ og tilhørende egenenergi $\tilde{E}_0$) til denne nye Hamiltonoperatoren.

d) Vi antar at systemet ved det nevnte tidspunktet $t = 0$ befinner seg i tilstanden $\psi(x)$ fra ligning (2). Det foretas en energimåling infinitesimalt kort tid etter $t = 0$. Hva er sannsynligheten for at den målte energien er $\tilde{E}_0$?

Oppgave 2: Kvantemekanikk i tre dimensjoner

Denne oppgaven handler om en partikkel med masse m som beveger seg i tre dimensjoner. Vi velger å bruke sfæriske koordinater og minner om at ∇^2 kan uttrykkes som

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\hat{L}^2 \tag{4}$$

der

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]. \tag{5}$$

I første del av oppgaven (**a-d**) skal vi studere vi en fri partikkel. Vi ser på bølgefunksjonen

$$\psi(r,\phi,\theta) = \frac{A}{r}\sin(kr), \tag{6}$$

der A og k er konstanter.

a) Sett opp Hamiltonoperatoren for systemet og vis at $\psi(r,\phi,\theta)$ i (6) er en energi-egenfunksjon. Finn også den tilhørende energien.

b) Anta at vår partikkel befinner seg i tilstanden (6). Forklar at dens totale angulærmoment L da er null.

c) I det følgende skal vi fortsatt bare se på tilstander med $L = 0$. Vis, ved eksplisitt løsning av Schrödingerligningen, at den mest generelle $L = 0$ løsningen kan uttrykkes som

$$\psi(r,\phi,\theta) = \frac{A}{r}\sin(kr) + \frac{B}{r}\cos(kr), \tag{7}$$

der A, B og k er konstanter.

d) Vis hvorfor vi må kreve $B = 0$ for å få en fysisk akseptabel løsning. Med andre ord er (6) den eneste fysisk akseptable løsningen for en fri partikkel med $L = 0$.

Vi antar nå at partikkelen befinner seg i et sentralsymmetrisk potensial gitt ved

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < r_0 \\ \infty & \phantom{\text{for}} \quad r \geq r_0 \end{cases} \tag{8}$$

e) Vi ser fortsatt på spesialtilfellet $L = 0$ når vi nå skal løse Schrödingerligningen for dette potensialet. Sett opp løsningene i områdene $r < r_0$ og $r > r_0$ og hvilke føringer randbetingelsene i $r = r_0$ gir for konstantene i bølgefunksjonen. Bruk dette til å skrive ned det fullstendige settet med (unormerte) løsninger.

f) Normer løsningene fra forrige deloppgave.