Oppgave 1: Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn.
Energi-egentilstandene til elektronet i hydrogenatomet kan generelt uttrykkes på formen

$$\psi_{nlm_l}(r,\phi,\theta) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\phi,\theta). \tag{1}$$

a) Hva er den fysiske tolkningen til kvantetallene n, l og m_l, og hvilke verdier kan de ta?

b) Forklar hva som generelt menes med degenerasjonsgraden til et energinivå. Bruk svaret i **a)** til å vise at degenerasjonsgraden for n'te energinivå i hydrogenatomet er $d(n) = n^2$.

Radialdelen av bølgefunksjonen, $R_{nl}(r)$, bestemmes av den radielle Schrödingerligningen som for hydrogenatomet kan skrives som

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + \left[-\frac{ke^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}\right](rR(r)) = E\cdot(rR(r)) \tag{2}$$

der m_e er elektronets masse (må ikke forveksles med kvantetallet m_l) og $k \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$. Energispekteret er som kjent gitt ved

$$E_n = -\frac{(ke^2)^2 m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \tag{3}$$

der $E_0 = 13.6\text{eV}$.

c) Vi betrakter nå den radielle bølgefunksjonen

$$R(r) = r^2 e^{-\alpha r}. \tag{4}$$

Bestem l og α slik at bølgefunksjonen (4) er en løsning av den radielle Schrödingerligningen (2). Vis at denne løsningen beskriver en $(3d)$ tilstand. (Hint: Siden ligningen du får må være oppfylt for alle r, må den være oppfylt separat for hver potens av r som multipliseres med $e^{-\alpha r}$.)

d) Den radielle sannsynligheten er definert som

$$P(r) = r^2\cdot R^2(r). \tag{5}$$

Beregn elektronets mest sannsynlige radius (dvs mest sannsynlige avstand fra kjernen) i tilstanden i oppgave **c)**. Uttrykk resultatet vha. Bohrradien $a_0 \equiv \hbar^2/(km_e e^2)$.

Til hjelp i neste delspørsmål oppgir vi at normeringskonstanten til bølgefunksjonen (4) er gitt ved $N = \sqrt{(2\alpha)^7/6!}$. Dere vil også få bruk for integralet

$$\int_0^\infty x^n \exp(-bx)dx = \frac{n!}{b^{n+1}}. \tag{6}$$

e) Beregn forventningsverdien $\langle r\rangle$ til elektronets radius i tilstanden (4). Sammenlign med svaret i **d)** og kommenter!

f) Anta til slutt at atomet plasseres i et konstant ytre magnetfelt B. Beskriv hvordan dette påvirker atomets energispektrum og spesielt hva som skjer med degenerasjonen $d(n)$ fra oppgave **b**). (Vi ser som sagt bort fra effekter som skyldes elektronets egenspinn.)

Oppgave 2: Harmonisk oscillator

I denne oppgaven skal vi studere en partikkel med masse m i et en-dimensjonalt harmonisk oscillator potensial, beskrevet ved Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{7}$$

a) Vis at bølgefunksjonen

$$\psi(x) = Ne^{-\gamma x^2} \tag{8}$$

er en egenfunksjon til $\hat{H}$ for en bestemt verdi av γ og beregn γ uttrykt ved frekvensen ω. N er en normeringskonstant.

b) Bestem (ved utregning) hvilken verdi på energikvantetallet n tilstanden ψ tilsvarer. Beregn normeringskonstanten N.

Ved et tidspunkt ($t = 0$) forandres systemets potensielle energi momentant, slik at det nye potensialet er

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}m(3\omega)^2 x^2 \tag{9}$$

med tilhørende Hamiltonoperator.

c) Skriv ned grunntilstanden (både bølgefunksjonen $\tilde{\psi}_0(x)$ og tilhørende egenenergi $\tilde{E}_0$) til denne nye Hamiltonoperatoren.

d) Vi antar at systemet ved det nevnte tidspunktet $t = 0$ befinner seg i tilstanden $\psi(x)$ fra ligning (8). Det foretas en energimåling infinitesimalt kort tid etter $t = 0$. Hva er sannsynligheten for at den målte energien er $\tilde{E}_0$?