UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 18. august 2011
Tid for eksamen: 09.00 (4 timer)
Oppgavesettet er på 3 (tre) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Forventningsverdier for harmonisk oscillator
En partikkel med masse m beveger seg i et endimensjonalt potensial gitt ved

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Den settes ved tiden $t = 0$ i tilstanden

$$\Psi(x, 0) = f(x)e^{ip_0 x/\hbar}, \quad \text{der} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = 1, \tag{2}$$

og hvor funksjonen $f(x)$ er en symmetrisk funksjon (med hensyn på origo).

a) Vis at forventningsverdien for posisjonen ved $t = 0$ er $\langle x \rangle_{t=0} = 0$. *Hint:* Når $f(x)$ er symmetrisk er også $f^*(x)$ symmetrisk.

b) Finn forventningsverdien $\langle p_x \rangle_{t=0}$ av bevegelsesmengden ved $t = 0$. *Hint:* Den deriverte av en symmetrisk funksjon er antisymmetrisk.

c) Bruk Ehrenfests teorem,

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p_x \rangle \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt}\langle p_x \rangle = \langle -\partial V/\partial x \rangle, \tag{3}$$

til å finne forventningsverdiene for x og p_x ved tiden $t \neq 0$. *Hint:* Vis at

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\omega^2 \langle x \rangle. \tag{4}$$

Uttrykk svaret ved hjelp av $\langle p_x \rangle_{t=0}$ dersom du ikke fikk til oppgave **b)**.

Oppgave 2 Den fotoelektriske effekt

a) Gjør kort rede for den fotoelektriske effekt, og skisser en eksperimentell oppstilling som kan brukes til å observere og måle denne.

b) En laser med bølgelengde 200 nm treffer et materiale av jern (Fe) med en intensitet på 3.0×10^{-9} W m^{-2}. Arbeidsfunksjonen for jern (Fe) er 4.50 eV. Anta at materialet reflekterer 50 % av den innfallende stråle, og at 10% av de absorberte fotonene fører til et emittert elektron. Finn antall elektroner emittert per meter og per sekund, samt den maksimale kinetiske energi for fotoelektronene.

c) Hvordan kan vi bestemme størrelsen på h/e (der h er Plancks konstant og e er elektronets ladning) ut fra observasjoner med forskjellig bølgelengde på lyset?

Oppgave 3 Coulomb-potensialet
Vi betrakter et system hvor en partikkel med ladning $-e$, masse m og spinn-0

beveger seg i potensialet fra en ladning Ze plassert i origo. Dette Coulomb-potensialet er da

$$V(\vec{r}) = -\frac{kZ}{r} = -\frac{Z\hbar^2}{m_e a_0 r}, \tag{5}$$

hvor Coulomb-konstanten k og Bohr-radien a_0 er, henholdsvis, gitt ved

$$k \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{og} \quad a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m_e k}. \tag{6}$$

Bølgefunksjonen for grunntilstanden er

$$\psi_1(r) = Ne^{-r/a}, \tag{7}$$

hvor parameteren a har dimensjonen lengde.

a) Angi normeringsbetingelsen for ψ_1 og vis at normeringskonstanten er gitt ved $N = (\pi a^3)^{-1/2}$.

b) Hva kan vi si om angulærmomentet til grunntilstanden?

c) Finn lengden a og energien E_1 til grunntilstanden ved innsetting i den tidsuavhengige Schrödingerligningen.

d) Finn $\langle 1/r \rangle$ for grunntilstanden. Bruk den inverse av denne forventningsverdien som et mål på "radien" for grunntilstanden. Diskuter hvordan denne radien og energien E_1 avhenger av massen m og ladningstallet Z.

Anta at dette systemet prepareres i den normerte tilstanden

$$\psi_n(\vec{r}) = R_n(r)Y(\theta, \phi) = R_n(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi, \tag{8}$$

der radialfunksjonen R_n er slik at ψ_n er en energi-egenfunksjon med egenverdi $E_n = E_1/n^2$.

e) Vis at vinkelfunksjonen Y er en egenfunksjon for $\hat{L}^2$, kvadratet av operatoren for angulærmoment, og finn egenverdien. *Hint*: Operatoren for angulærmoment er gitt ved

$$\hat{L}^2 \equiv -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right). \tag{9}$$

f) Anta at observabelen L_z måles når systemet er preparert som i (8). Hva er de mulige måleresultatene, og hvor sannsynlig er hver av disse? *Hint*: Skriv Y som en lineærkombinasjon av sfæriske harmoniske $Y_l^{m_l}$.