UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 16. august 2013
Tid for eksamen: 14.30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 5 (fem) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er mulig å oppnå i alt 80 poeng på denne eksamen. Oppgave 3 er inspirert av en tidligere eksamensoppgaver gitt ved NTNU, laget av Ingjald Øverbø og Jon Andreas Støvneng.

Oppgave 1 En-dimensjonal harmonisk oscillator i elektrisk felt

En partikkel med masse m og ladning q befinner seg i et harmonisk oscillator (HO) potensial

$$V_{HO}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Vi kjenner løsningene av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for dette potensialet, f.eks. er grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden gitt ved

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2} \quad \text{og} \quad \psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha x^2}, \tag{2}$$

hvor $\alpha = m\omega/2\hbar$, og hvor A_0 og A_1 er to normeringskonstanter.

a) Finn A_0 og A_1 ved hjelp av normeringsbetingelsen. [5 poeng]

Vi vil nå skru på et elektrisk felt $\mathcal{E}$ i x-retningen som forårsaker et elektrisk potensial $V_E(x) = q\mathcal{E}x$ i tillegg til HO-potensialet.

b) Vis at

$$\psi_0^E(x) = A_0 e^{-\alpha(x+\xi)^2} \tag{3}$$

er en løsning av den nye tidsuavhengige Schrödingerligningen for potensialet

$$V(x) = V_{HO}(x) + V_E(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + q\mathcal{E}x, \tag{4}$$

og finn ξ. [7 poeng]

c) Hva er enheten til $|\psi_0^E(x)|$? [2 poeng]

d) Finn energien E_0^E til tilstanden $\psi_0^E(x)$. [4 poeng]

e) Hva er forventningsverdien til posisjonen $\langle x\rangle$ for $\psi_0^E(x)$? [4 poeng]

Vi preparerer så partikkelen i en begynnelsestilstand

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{4}{5}}A_0(1+\sqrt{\alpha}x)e^{-\alpha x^2}, \tag{5}$$

uten å skru på det elektriske feltet.

f) Hva er sannsynligheten for å måle en energi for partikkelen som tilsvarer den første eksiterte tilstanden for den harmoniske oscillatoren, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$? [4 poeng]

g) La oss ta to typer spinn–$\frac{1}{2}$ fermioner som er identiske, bortsett fra at de har motsatt ladning, f.eks. elektroner og positroner. Hvor mange slike partikler er det plass til i hvert energinivå uten at det elektriske feltet er skrudd på? Ignorer Coulomb-vekselvirkningen mellom partiklene, men ta hensyn til spinn. Hva skjer når du skrur på feltet? Tenk da også kvalitativt på Coulomb-vekselvirkningen. [4 poeng]

Oppgave 2 Operatorer i kvantemekanikk

a) Gitt følgende operator for en observabel:

$$\hat{f} \equiv a\hat{p} + b\hat{x}, \tag{6}$$

hvor a og b er to reelle konstanter, og $\hat{p}$ og $\hat{x}$ er operatorene til bevegelsesmengde og posisjon i en dimensjon. Hva må forholdet være mellom enhetene til a og b, og mellom enheten til a og enheten for egenverdiene til $\hat{f}$? Uttrykk svarene ved hjelp av enheten til Plancks konstant. [4 poeng]

b) Vis at egenfunksjonene ψ_f til $\hat{f}$ er gitt ved

$$\psi_f(x) = C \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{b}{2a}x^2 - \frac{f}{a}x\right)\right], \tag{7}$$

hvor C er en vilkårlig konstant, og finn egenverdiene f. *Hint:* Differensialligningen du får er separabel. [6 poeng]

c) Vis at egenfunksjonene er ortogonale og normaliser de. *Hint:* I fysikken tillater vi oss å skrive δ-funksjonen som

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}\, dk. \tag{8}$$

[6 poeng]

d) Ortonormalitetskriteriet for egenfunksjoner ψ_p med et kontinuerlig spektra med egenverdier p er gitt ved en δ-funksjon:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\psi_{p'}(x)\, dx = \delta(p - p'), \tag{9}$$

hvor δ-funksjonen må tolkes som å være en identitet på følgende måte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{10}$$

Finn enheten til δ-funksjonen for et vilkårlig argument. [4 poeng]

Oppgave 3 Tre-dimensjonal harmonisk oscillator
Denne oppgaven dreier seg om energiegenfunksjonene til en partikkel med masse m som befinner seg i et tre-dimensjonalt (isotropt) harmonisk oscillator potensial,

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{11}$$

Man kan vise via separasjon av variable (se vårens eksamen) at et mulig sett av egenfunksjoner for denne partikkelen er produkttilstander av typen

$$\psi_{n_x n_y n_z} \equiv \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z), \tag{12}$$

som vi i det følgende vil skrive $\psi_{n_x n_y n_z} \equiv (n_x n_y n_z)$ for å unngå forveksling. Hver av faktorene i produktet, f.eks. $\psi_{n_x}(x)$, oppfyller den en-dimensjonale harmonisk oscillator ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi_{n_x}(x) = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\psi_{n_x}(x), \tag{13}$$

hvor $n_x = 0, 1, 2, \ldots$. Produkttilstanden (12) er en egentilstand til Hamilton-operatoren $\hat{H}$ for den tre-dimensjonale oscillatoren, med egenverdiene

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) \equiv E_n, \tag{14}$$

hvor $n = n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, \ldots$.

Et alternativ til egenfunksjonssettet ovenfor, når vi har et kulesymmetrisk potensial som her, er de simultane egenfunksjonene

$$\psi_{n_r lm} \equiv R_{ln_r}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \frac{u_{ln_r}(r)}{r}Y_l^m(\theta, \phi), \tag{15}$$

til angulærmomentumoperatorene $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ og Hamilton-operatoren $\hat{H}$, i sfæriske koordinater. $Y_l^m(\theta, \phi)$ er de sfæriske harmoniske. Her kan man vise at $u(r)$ må være lik null i origo og oppfylle radialligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]u_{ln_r} = Eu_{ln_r}. \tag{16}$$

Vi karakteriserer radialfunksjonene ved l og radialkvantetallet n_r, som viser seg å være antall nullpunkter for funksjonen $u_{ln_r} = rR_{ln_r}$ for $0 < r < \infty$.

a) Vis at grunntilstanden $\psi_{n_x=0,n_y=0,n_z=0} = (000)$ *også* er en tilstand av typen $\psi_{n_r lm}$, og bestem angulærmomentkvantetallene l og m samt radialkvantetallet n_r for denne tilstanden. [5 poeng]

b) Vis at også egenfunksjonen (001) kan skrives på formen ovenfor, og bestem l, m, og n_r for *denne* tilstanden. [5 poeng]

c) Vis at tilstandene (100) og (010) har samme l–kvantetall som tilstanden (001), og at de er lineærkombinasjoner av to tilstander av typen $\psi_{n_r lm}$. Inverter disse lineærkombinasjonene slik at du kan skrive de to tilstandene $\psi_{n_r lm}$ ved hjelp av (100) og (010). *Hint:* Se på de to lineærkombinasjonene $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}[(100) \pm i(010)]$. [10 poeng]

d) Finn degenerasjonsgraden for tilstander av typen $\psi_{n_x n_y n_z} \equiv (n_x n_y n_z)$ med $n = 2$. [2 poeng]

e) Også disse tilstandene kan lineærkombineres til tilstander av typen $\psi_{n_r lm}$. En slik lineærkombinasjon er

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(101) - i(011)]. \tag{17}$$

Finn l– og m–verdiene, og bestem også radialkvantetallet n_r, for denne tilstanden. [5 poeng]

f) Hvor mange uavhengige lineærkombinasjoner har vi for $n = 2$ tilstandene som gir $l = 2$? Kommenter svaret i forhold til svaret på oppgave **d)** over. [3 poeng]