UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 14. august 2015
Tid for eksamen: 09.00 (4 timer)
Oppgavesettet er på fire (4) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

*Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.*

Oppgave 1

Gjør kort rede for hva den fotoelektriske effekt er, hva slags konklusjoner man kunne trekke fra observasjoner av denne i kvantefysikkens fødsel, og beskriv et eksperiment som kan observere og måle kvantitative egenskaper ved denne effekten. Tegn gjerne en skisse. [15 poeng]

Oppgave 2

Vi ser på et éndimensjonalt system hvor en av de stasjonære tilstandene $\psi(x)$ er gitt som

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ Ne^{-ax}(1 - e^{-ax}) & \text{for } x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

hvor N og a er to reelle, positive konstanter.

a) Gi normeringsbetingelsen for den stasjonære tilstanden $\psi(x)$. [2 poeng]

b) Finn N uttrykt ved a. [6 poeng]

c) Finn forventningsverdien $\langle x \rangle$ til posisjonen til en partikkel som er i tilstanden ψ. [6 poeng]

d) Finn posisjonen x_m hvor sannsynlighetstettheten er størst for denne tilstanden. [4 poeng]

e) For tilstanden $\psi(x)$ er den tilhørende egenverdien for energien E gitt ved

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}. \tag{2}$$

Vis at potensialet $V(x)$ som partikkelen beveger seg i da er gitt ved

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < 0, \\ -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}\frac{1}{e^{ax}-1} & \text{for } x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

[8 poeng]

f) Finn posisjonen x_0 hvor den potensielle energien $V(x)$ antar verdien E i (2). Hva er tolkningen av x_0? [6 poeng]

g) Tegn en skisse av potensialet og merk av $\langle x \rangle$, x_m og x_0. [4 poeng]

Oppgave 3

For de stasjonære tilstandene ψ_n til en harmonisk oscillator med potensial

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{4}$$

finnes det stigeoperatorer

$$\hat{a}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \tag{5}$$

$$\hat{a}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \tag{6}$$

som har følgende egenskaper

$$\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \quad \text{og} \quad \hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}. \tag{7}$$

Det kan også være nyttig å huske at $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] \equiv \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_- = 1$.

Vi skal se på egentilstander til $\hat{a}_-$, altså romlige tilstander $\psi_\alpha(x)$ som oppfyller

$$\hat{a}_-\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha, \tag{8}$$

hvor α kan være et vilkårlig komplekst tall. Disse tilstandene kalles **koherente tilstander**.

a) Er grunntilstanden ψ_0 til en harmonisk oscillator en koherent tilstand? Og hva er i tilfelle α? Grunngi svaret. [4 poeng]

b) Vis at du kan skrive operatorene for posisjon og bevegelsesmengde som

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \tag{9}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \tag{10}$$

[4 poeng]

c) Vis at (beklager!)

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*), \tag{11}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}[1 + (\alpha + \alpha^*)^2], \tag{12}$$

$$\langle p \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha^* - \alpha), \tag{13}$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}[1 - (\alpha^* - \alpha)^2], \tag{14}$$

for de koherente tilstandene. *Hint:* Vi har sett i et kollokvium at $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ er såkalt hermitisk konjugerte, altså at det følgende holder for en vilkårlig tilstand ψ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{a}_+ \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_-\psi)^* \psi \, dx, \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{a}_- \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_+\psi)^* \psi \, dx. \tag{16}$$

[8 poeng]

d) Finn $\sigma_x \sigma_p$ for de koherente tilstandene og kommenter hva svaret betyr. [5 poeng]

e) Hvor mange spinn$-\frac{1}{2}$-fermioner kan du ha i samme koherente tilstand? Anta at de ikke vekselvirker. [2 poeng]

f) En koherent tilstand kan, som alle andre tilstander, skrives ved hjelp av de stasjonære tilstandene ψ_n som

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x). \tag{17}$$

Vis at

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \tag{18}$$

[6 poeng]