# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

**Eksamen:** FYS2140 Kvantefysikk

**Dato:** 17. august 2017, 14:30-18:30 (4 timer)

**Oppgavesettet er på** 2 sider

**Lovlige hjelpemidler:** Rottmann: "Matematisk formelsamling", Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter" eller Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter". Godkjent kalkulator. Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket).

**Oppgave 1: Blandede, kvalitative spørsmål** I oppgavene a)-d) nedenfor bes det kun om kvalitative redegjørelser.

a) (5 poeng) Gjør kort rede for Paulis eksklusjonsprinsipp.

b) (5 points) Beskriv kort den foto-elektriske effekt og hvordan den motiverte fotonbegrepet.

c) (5 poeng) Hvordan bidro eksperimentene med Compton spredning til tolkningen av fotoner som partikler?

d) (3 poeng) Da Schrödinger fant frem til sin berømte ligning, gikk han veien om en ligning, som senere har fått navnet Klein-Gordon ligningen. Hvilken tilnærmelse gjorde Schrödinger for å komme frem til sin ligning, og hva betyr den for det fysiske innholdet i ligningen?

e) (5 poeng) Et system av to elektroner, hvert med spinn-egentilstandene $\chi_\pm$, har et totalspinn beskrevet av kvantetallene $s$ og $m$. Tilstanden med $s = 1$ og $m = 0$ har formen $(1/\sqrt{2})(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$ der indeksen $(i)$ på $\chi_\pm^{(i)}$ markerer elektron nummer $i$, $i \in \{1, 2\}$. Hvordan ser tilstanden med $s = 0$ og $m = 0$ ut? Vis også, gjerne ved enkel regning, at egenverdien til totalspinnet $S^2$ er 0 for denne tilstanden.

**Oppgave 2: Partikkel i sylindrisk potensial**

*Denne oppgaven består av deloppgaver som er tilnærmet uavhengige av hverandre.*

En partikkel med masse $m$ beveger seg i et potensial

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + V(z)$$

der $V(z) = 0$ for $0 < z < L$ og $\infty$ utenfor dette intervallet. Hamiltonoperatoren til denne partikkelen er derfor

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + V(z).$$

a) (4 poeng) Skriv ned den tidsuavhengige Schrödingerligningen, og vis at den kan separeres i tre uavhengige ligninger der to av disse ligningene hver beskriver en én-dimensjonal harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega$, mens den tredje beskriver en partikkel i en én-dimensjonal boks med bredde $L$ og uendelige potensialvegger. *Hint*: Skriv $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$.

b) (5 poeng) Vis at energiegenverdiene kan skrives $E_{nj} = \hbar\omega(n+1)+(\hbar k_j)^2/(2m)$. Vis at $k_j = \pi j/L$, bestem de mulige verdiene av $j$.

c) (5 poeng) Forklar begrepet degenerasjon og bestem degenerasjonsgraden til energinivået $E_{nj}$. Vi skal anta at forholdet mellom de numeriske verdiene for $(\hbar\pi)^2/(2mL^2)$ og $\hbar\omega$ er et irrasjonalt tall, slik at forskjellige verdier av $n$ og $j$ alltid gir forskjellige verdier av $E_{nj}$.

d) (4 poeng) Forklar hvorfor egenfunksjonen med $n = 0$ og vilkårlig $j$ kan skrives $\psi_{0j} = be^{-\alpha r^2} \sin k_j z$ der vi har innført sylinderkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bestem normaliseringskonstanten $b$.

e) (10 poeng) Vi skal anta at partikkelen starter i en tilstand $\psi_I$ med uniform sannsynlighetstetthet innenfor en sylinder med $0 < z < L$ og $r < R$. Utenfor denne sylinderen er sannsynlighetstettheten null. På denne måten er sannsnligheten den samme for å finne partikkelen hvor som helst innenfor sylinderen. Bestem denne normaliserte initialtilstanden $\psi_I$ og regn ut sannsynligheten for å måle energien $E_{0j}$ som funksjon av $R$ og $j$. Diskuter $R$-avhengigheten til denne sannsynligheten i grensene $R \to 0$ og $R \to \infty$. Regn spesielt ut sannsynligheten dersom $\alpha R^2 = 1$.

f) (3 poeng) Vil forventningsverdien til energien endre seg med tiden når partikkelen starter i tilstanden $\psi_I$?

g) (3 poeng) I det følgende skal vi studere oppførselen til angulærmomentet i dette potensialet. Vis at $[L_z, H] = 0$ og forklar hva dette betyr for mulighetene til å finne simultane egentilstander for $L_z$ og $H$. *Hint:* Det kan være nyttig å bruke sylinderkoordinater hvor $L_z = (\hbar/i)\partial/\partial\phi$ og Laplace operatoren

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

h) (5 poeng) Vis at egenverdiene til $L_z$ er $m\hbar$ der $m = 0, \pm1, \pm2....$, finn de tilsvarende egenfunksjonene og regn ut sannsynligheten for å måle verdien $\hbar m$ dersom partikkelen er i tilstanden $\psi_{0j}$. Tolk resultatet. *Hint:* Her trenger man bare å regne ut ett enkelt $\phi$-integral.

i) (5 poeng) Vi skal nå anta at $n = 1$ og velge egenfunksjonen $\psi_{1j} = c\ x\ e^{-\alpha r^2} \sin k_j z$ der $c$ er en normaliseringskonstant. Hvilken annen egenfunksjon kunne vi valgt med $n = 1$ og samme $j$-verdi? Hvilke verdier for $L_z$ vil vi nå kunne måle?