UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: Torsdag 16. august 2018, kl 14:30-18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 3 sider
Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1: Materiens bølgeegenskaper

a) De Broglie fikk Nobelprisen i 1929 for sin hypotese. Beskriv med noen setninger hva den går ut på.

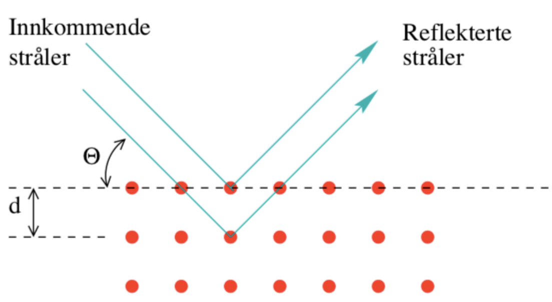
b) Sammenhengen mellom energi og bevegelsesmengde for en relativistisk partikkel er $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$. Forklar symbolene og skriv opp uttrykket for partikkelens kinetiske energi E_k.

c) Uttrykk de Broglie-bølgelengden λ for en relativistisk partikkel ved hjelp av E_k.

d) Hvis vi regner ikke-relativistisk, hva blir da λ?

e) Hvis et elektron skal beskrives ikke-relativistisk, hvilken grensebetingelse vil du da sette for E_k?

Vi sender en mono-energetisk elektronstråle mot overflaten av en krystall som vist i Fig. 1. Innfallsvinkel og spredningsvinkel er Θ og avstanden mellom atom-lagene i krystallen er d.



Figur 1: Braggdiffraksjon (figuren er hentet fra FYS2140-kompendiet).

f) Vis at vi måler maksimal intensitet for den reflekterte strålingen når Bragg-betingelsen $2d \sin\Theta = n\lambda$ med $n = 1, 2, 3, \ldots$ er oppfylt. Forklar fysikken bak fenomenet med et par setninger.

g) Atomlagene i krystallen har en avstand på $d = 0.1$ nm. Begrunn at du kan bruke ikke-relativistiske elektroner for å studere Braggdiffraksjon i dette tilfellet (et grovt overslag er tilstrekkelig for å besvare spørsmålet).

Oppgave 2: Kvantemekanikk og fri partikkel

a) Anta at vi beskriver en fysisk, klassisk størrelse Q ved hjelp av posisjon $\vec{r}$ og bevegelsesmengde $\vec{p}$. Hvordan kan vi uttrykke $Q(\vec{r}, \vec{p})$ kvantemekanisk? Hvilke verdier observerer vi i enkeltmålinger?

b) Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likningen for en fri partikkel i én dimensjon (bare x-akse og $V(x) = 0$).

c) Skriv ned en planbølge som beveger seg i positiv x-retning, og vis at denne er en løsning av den tidsavhengige Schrödinger-likningen i oppgave b). Er det noen formelle krav som planbølgen ikke oppfyller?

d) Vi konstruerer en bølgepakke for en partikkel som er begrenset i rom ved

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk, \qquad (1)$$

hvor $\phi(k)$ er vekten på hver enkelt planbølge med gitt k. Vis at også denne bølgefunksjonen er en løsning av den tidsavhengige Schrödinger-likningen.

e) Definer uttrykkene for fase- og gruppehastighet og lag en skisse av bølgepakken med disse hastighetsvektorene inntegnet.

Oppgave 3: Partikkel i boks

En partikkel er plassert i en 1-dimensjonal brønn mellom to uendelige potensial-barrierer:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad 0 \le x \le a, \\ +\infty & \text{ellers.} \end{cases} \qquad (2)$$

a) Sett opp opp den tidsuavhengige Schrödinger-likningen, den generelle løsningen av denne og randbetingelsene for bølgefunksjonen.

b) Vis at energiegenverdiene og de normerte energiegenfunksjonene er henholdsvis $E_n = E_1 n^2$ og $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x)$, hvor $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2a^2 m}$ og $k_n = \frac{n\pi}{a}$ med $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Anta at partikkelen starter ved tiden $t = 0$ i en superposisjon av de to laveste tilstandene

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x) - \psi_2(x)\right]. \tag{3}$$

I denne oppgaven kan du få bruk for følgende integraler og relasjon

$$\int u\sin^2 u\, du = \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}u\sin 2u - \frac{1}{8}\cos 2u + C \tag{4}$$

$$\int u\sin u \sin 2u\, du = \frac{u\sin^3 u}{3} + \frac{3}{12}\cos u - \frac{\cos 3u}{36} + C \tag{5}$$

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \tag{6}$$

c) Skriv ned systemets tilstand $\Psi(x,t)$ ved tiden t. Vis at forventningsverdien av posisjonen i denne tilstanden blir

$$\langle x(t)\rangle = \frac{a}{2} + \frac{8a}{9\pi^2}\cos(3\omega t), \tag{7}$$

hvor vinkelfrekvensen er gitt ved $\omega = E_1/\hbar$. (Du kan gå videre med de 2 siste del-oppgavene, selvom du ikke kan vise likn. (7).)

d) Hva er den minste midlere avstand d partikkelen har fra potensialbarrierene?

e) Beskriv kort Ehrenfests teorem og benytt dette til å finne forventningsverdien av partikkelens hastighet $v(t)$ i tilstanden $\Psi(x,t)$. Ved hvilke tidspunkt snur/reflekteres partikkelen? Når har partikkelen høyest fart og i hvilken posisjon befinner partikkelen seg da?