UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: Fredag 16. august 2019, kl 14:30-18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 3 sider
Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1: Partiklers bølgelengde og Compton spredning

Vi tar utgangspunkt i det relativistiske uttrykket for energien til en partikkel

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}. \tag{1}$$

Bruk eV som enhet for energi og eV/c som enhet for bevegelsesmengde.

a) Gjør kort rede for de størrelser som inngår i Likn. (1). Hvordan vil likningen se ut for en masseløs partikkel?

b) Hva er uttrykket for energien E til et foton som funksjon av bølgelengden λ? Bruk dette og Likn. (1) for å finne fotonets energi og bevegelsesmengde når bølgelengden er 500 nm $= 5.00 \times 10^{-7}$m.

I et Compton-eksperiment blir et foton med energi $E = h\nu = hc/\lambda$ spredd en vinkel θ mot et elektron som antas å ligge i ro før spredningen.

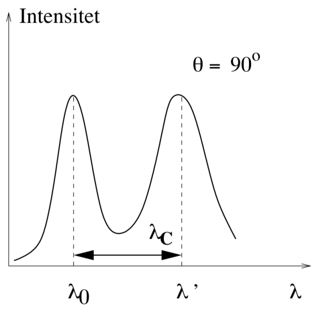
c) Tegn en skisse av Compton-spredning hvor du angir spredningsvinkelen θ for fotonet etter spredningen.

d) Comptons formel er gitt ved

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right). \tag{2}$$

Formuler de tre viktigste fysiske prinsippene/sammenhengene som trengs for å beregne bølgelengden λ' til det spredte fotonet. Du skal *ikke* utlede Comptons formel.

Røntgenstråler med en bølgelengde 0.121nm treffer en målskive med karbonatomer. De spredte røntgenstrålene blir observert i en vinkel på 90°. Intensiteten av de spredte røntgenstrålene som funksjon av bølgelengden λ' ved denne vinkelen er skissert i Fig. 1.



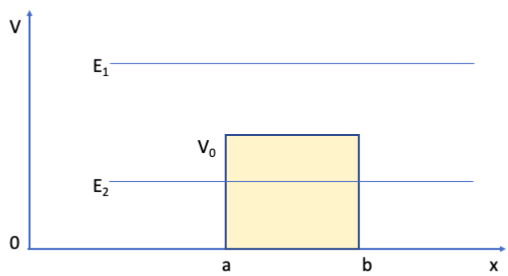
Figur 1: Intensitet av spredte røntgenstråler ved $\theta = 90°$ (tatt fra kompendiet).

e) Beregn den teoretiske bølgelengden λ' til de spredte røntgenfotonene ved $\theta = 90°$.

f) Figur 1 viser en topp ved $\lambda_0 = 0.121$nm (den opprinnelige bølgelengden til røntgenfotonene). Hva skyldes denne toppen?

Oppgave 2: Potensialbarriere

En strøm av partikler kommer inn fra venstre i Fig. 2 og møter en potensialbarriere med høyde V_0. Vi studerer to tilfeller:
- Tilfelle 1: Den kinetiske energien er $E_1 > V_0$
- Tilfelle 2: Den kinetiske energien er $E_2 < V_0$



Figur 2: Partikler med energi E_1 eller E_2 møter et potensial med høyde V_0.

a) Forklar kort hva som skjer klassisk og kvantemekanisk i de to tilfellene.

b) Skissér den delen av bølgefunksjonen som går mot høyre i de to tilfellene. Det skal ikke gjøres beregninger, men vær nøyaktig med å tegne forandringer i bølgelengden λ til partikkelen og i amplituden av bølgefunksjonen ψ.

Oppgave 3: Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn. Hydrogenatomets sentralpotensial er gitt ved

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{3}$$

hvor vi bruker polarkoordinater $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$. Coulomb-konstanten er definert ved $k = e^2/4\pi\epsilon_0$. Hydrogenatomets Hamilton-operator er gitt ved

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right) + V(r). \tag{4}$$

Generelt betegner man systemets energi-egenfunksjon ved $\psi_{nlm}(\vec{r})$.

a) Hva er fellesbetegnelsen på n, l og m og hvilke regler gjelder for hvert av disse i hydrogenatomet.

Hydrogens grunntilstand er gitt ved

$$\psi_{100}(\vec{r}) = Ae^{-r/a}, \tag{5}$$

hvor A er normeringskonstanten og parameteren a har dimensjon lengde.

b) Skriv opp normeringsintegralet for ψ_{100} og finn normeringskonstanten A, som antas å være en positiv og reell størrelse. *Hint*: Du kan dra nytte av likheten $\int_0^\infty x^n e^{-x/a} dx = n! a^{n+1}$.

c) Uten beregninger, hva kan du si om angulærmomentet til grunntilstanden?

d) Bestem lengden a og grunntilstanden E_1 uttrykt ved hjelp av fundamentale konstanter. *Hint*: Innsett ψ_{100} i den tidsuavhengige Schrödingerlikningen med Hamilton-operatoren fra Likn. (4).

Anta at dette systemet prepareres i tilstanden

$$\psi_n(\vec{r}) = R_n(r)Y(\theta, \phi) = R_n(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi, \tag{6}$$

hvor R_n er hydrogenatomets radialfunksjon.

Operatoren for kvadratet av angulærmomentet er

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right). \tag{7}$$

e) Vis at $\hat{L}^2\psi_n(\vec{r}) = 2\hbar^2\psi_n(\vec{r})$. Hvilke betingelser setter dette på n, l og m?

f) Anta at observabelen L_z måles når systemet er preparert som i Likn. (6). Hva er de mulige måleresultatene, og hvor sannsynlig er hver av disse? *Hint*: Du kan få bruk for disse sfærisk-harmoniske funksjonene $Y_l^m = Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$, og at $\sin\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$.