UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i FY102 og FYS-113: Kvantefysikk
Eksamensdag: Onsdag 4 juni 2003
Tid for eksamen FY102: 0900 - 1400
Eksamenssettet består av 3 sider, kontrollé at du har riktig antall.
Tillatte hjelpemidler: Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Rottmann: Matematische Formelsamlung
To A4 ark med egne notater
Godkjent numerisk elektronisk kalkulator

Oppgave 1.

I denne oppgaven skal vi anvende Bohrs atommodell. Bruk enheter eV for energi og nm for lengde.

a) Forklar kort Bohrs postulater og vis at uttrykket for energien til hydrogenatomet (uten tyngdepunktskorreksjon) er gitt ved

$$E = E_n = -k\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2} = -13.6\frac{1}{n^2}\text{ eV},$$

hvor $n = 1, 2, 3, \ldots$, $ke^2 = 1.44$ eVnm og

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e ke^2} = 0.529 \times 10^{-10}\text{ m},$$

er Bohrradien.

Elektroner med energi 12.4 eV kolliderer med hydrogenatomer i grunntilstanden i et gass utladningsrør (jfr. Franck-Hertz eksperimentet). Hydrogenatomet eksiteres for deretter å emittere et foton. Vi antar at hydrogenatomet er i ro når det emitterer et foton ved en overgang fra et energinivå E_x til et annet nivå E_y.

b) Finn bølgelengdene til den emitterte strålingen fra hydrogenatomet.

Vi skal nå erstatte elektroner med fotoner og studere emisjon og absorpsjon av fotoner i et hydrogenatom. I forrige punkt antok vi at hydrogenatomet var i ro under emisjon. Imidlertid vil en liten del av energien overføres til atomet som kinetisk energi (rekylvirkning), og fotonet får derfor en tilsvarende mindre energi: $h\nu = E_1 - E_2 - \Delta E$.

c) Bruk bevaring av energi og bevegelsesmengde for å finne et uttrykk for denne korreksjonen ΔE. Gå ut fra at fotonet har en bevegelsesmengde lik $h\nu/c$.

d) Gjennomfør en tilsvarende diskusjon for det tilfellet at atomet absorberer et foton.

Oppgave 2.

a) Forklar kort hvilken fysisk betydning vi tillegger en bølgefunksjon $\Psi(\vec{r},t)$ i kvantemekanikken, hvor $\vec{r}$ er romkoordinaten og t tiden. Hvilke matematiske krav må vi stille til en slik bølgefunksjon? Forklar kort hva vi mener med en kvantemekanisk operator, dens forventningsverdi og en egenfunksjon for en operator.

b) Skriv ned den tidsavhengige Schrödingerlikningen for en partikkel med potensiell energi $V(\vec{r})$ og vis at løsningene kan skrives på formen

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\exp(-iEt/\hbar),$$

og finn likningen som $\psi(\vec{r})$ tilfredsstiller.

Vi skal studere det kvantemekaniske problemet for et elektron som er fanget inn i et en-dimensjonalt uendelig potensial. Elektronets potensielle energi V er:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\frac{a}{2} \leq x < \frac{a}{2} \\ +\infty & \quad x \leq -\frac{a}{2} \text{ og } x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Massen til elektronet er m_e.

c) Bestem de normerte energi egenfunksjonene og de tilhørende energi egenverdiene for systemet.

d) Vis at disse bølgefunksjonene er ortogonale, dvs.

$$\int_{-a/2}^{+a/2} \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

e) Bestem middelverdien (forventningsverdien) for bevegelsesmengden p og for p^2 når systemet er i en energi egentilstand.

f) Vis at uskarphetsrelasjonen for posisjon og bevegelsesmengde gir som konsekvens en nedre grense for energien til partikkelen. Sammenlign dette med resultatet i pkt. c) og kommenter.

Ved tiden $t = 0$ er elektronet i en tilstand gitt ved en linær kombinasjon av de to laveste stasjonære tilstandene

$$\Psi(x,0) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x),$$

med $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

g) Finn bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ og beregn forventningsverdiene av p og x som funksjon av tiden t.

Systemet består nå av et elektron med masse m_e i en to–dimensjonal potensialboks. Elektronets potensielle energi er:

$$\begin{aligned} V &= 0 \qquad \text{for } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \text{ og } -a < y < a, \\ V &= +\infty \qquad \text{ellers.} \end{aligned}$$

h) Bestem de normerte energi egenfunksjonene og de tilhørende energi egenverdiene for systemet.

i) Bestem degenerasjonsgraden for de tre laveste gruppene av energi egentilstandene. Diskuté pariteten av de tilsvarende energi egenfunksjonene.

Vi setter til slutt på et svakt elektrisk felt i y-retningen med styrke ε og potensiell energi ved $W = e\varepsilon y^2$.

j) Beregn energikorreksjonen fra dette feltet for de to laveste gruppene av energi egentilstandene og finn den totale energien for hver tilstand.