Oppgave 1: Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn.
Energi-egentilstandene i hydrogenatomet skrives generelt som

$$\psi_{nlm}(r,\phi,\theta) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\phi,\theta) \tag{1}$$

a) Forklar kort hvilken fysisk betydning kvantetallene n, l og m har og hvilke verdier de kan ta.

b) Forklar hva som menes med et sentralsymmetrisk potensial og gi et eksempel. Hvorfor er vinkeldelen av bølgefunksjonen, $Y_{lm}(\phi,\theta)$, den samme enten vi ser på hydrogenatomet eller på en *fri* partikkel i 3 dimensjoner?

Radialdelen av bølgefunksjonen, $R_{nl}(r)$, bestemmes av den radielle Schrödingerligningen som for hydrogenatomet kan skrives som

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + \left[-\frac{ke^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}\right](rR(r)) = E\cdot(rR(r)) \tag{2}$$

der m_e er elektronets masse (må ikke forveksles med kvantetallet m) og $k \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$. Energispekteret er som kjent gitt ved

$$E_n = -\frac{(ke^2)^2 m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \tag{3}$$

der $E_0 = 13.6$eV.

c) Vis ved innsetting i den radielle Schrödingerligningen (2) at den radielle bølgefunksjonen

$$R(r) = re^{-\gamma r} \tag{4}$$

er en løsning for en bestemt verdi av l og γ og at denne løsningen tilsvarer energinivået $n = 2$. Bestem l og γ for denne løsningen. Angi også den spektroskopiske betegnelsen (nl) for denne tilstanden. (Hint: Siden ligningen du får må være oppfylt for alle r, må den være oppfylt separat for hver potens av r som multipliseres med $e^{-\gamma r}$.)

d) Forklar hvorfor den radielle sannsynlighet er definert som

$$P(r) = r^2 \cdot R^2(r) \tag{5}$$

snarere enn bare kvadratet av den radielle bølgefunksjonen, $R^2(r)$. Beregn elektronets mest sannsynlige radius (dvs mest sannsynlige avstand fra kjernen) i tilstanden i oppgave **c)**. Uttrykk resultatet vha. Bohrradien $a_0 \equiv \hbar^2/(km_e e^2)$.

Oppgave 2: Partikkel på sirkel

Vi skal i denne oppgaven se på et 1-dimensjonalt problem med en partikkel med masse M som beveger seg på en sirkel med radius R.

a) Bruk det klassiske uttrykket $L_z = MvR$ til å uttrykke partikkelens kinetiske energi vha L_z. Bruk deretter substitusjonen $L_z \to -i\hbar\partial/\partial\phi$ til å vise at

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2MR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{6}$$

b) Vis at

$$\psi_k(\phi) = N_k e^{ik\phi} \tag{7}$$

er en løsning av den tidsuavhengige Schrödingerligningen og samtidig egenfunksjon for L_z. Bestem normeringskonstanten N_k. (Kvantetallet k må ikke forveksles med konstanten k fra Oppgave 1.) Det er disse løsningene vi skal bruke i resten av oppgaven.

c) Siden partikkelen lever på en sirkel, må vi identifisere vinklene ϕ og $\phi + 2\pi$ som samme punkt i rommet. Bølgefunksjonen må derfor ha samme verdi for begge disse argumentene (krav om entydighet). Formuler det matematiske kravet dette gir for bølgefunksjonen og vis hvilken betingelse dette gir for tillatte verdier av k. Skriv ned de tilsvarende kvantiserte verdiene på partikkelens angulærmoment L_z og energi E_k. Hva er degenerasjonsgraden til E_k?

Vi antar nå at det befinner seg *to* partikler i systemet, og at disse er spinn 1/2-fermioner. Vi ser bort fra eventuelle vekselvirkninger mellom dem.

d) Formuler Paulis eksklusjonsprinsipp

e) Anta at de to partiklene befinner seg i hver sin angulærmoment-tilstand k_1 og k_2 der $k_1 \neq k_2$. Skriv ned de mulige to-partikkel-bølgefunksjonene. Spesifiser både rom- og spinndel. Normér romdelen. Skriv ned egenenergien for tilstanden.