Oppgave 1: Litt av hvert...

a) Hvilke(n) av følgende funksjoner er egenfunksjon(er) for bevegelsesmengdeoperatoren $\hat{p} = -i\hbar(\partial/\partial x)$, dvs har skarp bevegelsesmengde? Oppgi også tilhørende egenverdi(er):

(i) $\psi(x) = \sin(kx)$
(ii) $\psi(x) = \exp(6\pi i x/L)$
(iii) $\psi(x) = \ln(x/L)$

b) Skriv ned Heisenbergs uskarphetsrelasjon og forklar symbolene. Posisjonen til et sandkorn med masse $m = 0,01$g bestemmes vha synlig lys med bølgelengde 500nm. Den beste oppløsningen en kan oppnå er da $\sigma_x \approx$ 500nm. Bruk uskarphetsrelasjonen til å estimere den tilsvarende uskarpheten i sandkornets hastighet. Kommenter svaret!

c) Anta at ψ_1 og ψ_2 begge er egenfunksjoner for en operator $\hat{O}$, med samme egenverdi λ. Vis at lineærkombinasjonen

$$\psi = K_1\psi_1 + K_2\psi_2, \tag{1}$$

der K_1 og K_2 er vilkårlige konstanter, også er en egenfunksjon for $\hat{O}$, og at egenverdien er den samme som for ψ_1 og ψ_2.

d) Vi har sett at egenfunksjonene for en partikkel i et uendelig bokspotensial ($V(x) = 0$ for $0 < x < L$; ∞ ellers) er

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right); \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2}$$

med tilhørende egenenergier

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{3}$$

Anta nå at det befinner seg to identiske spinn 1/2-fermioner i boksen. Vi ser bort fra vekselvirkningen mellom dem. Skriv ned topartikkel- bølgefunksjonen for systemets grunntilstand, inkludert spinndelen. Hva er det totale spinnet i denne tilstanden? Angi også grunntilstandsenergien.

Oppgave 2: To-dimensjonal harmonisk oscillator

(I denne oppgaven ser vi bort fra partikkelens eventuelle egenspinn.)
Den harmoniske oscillator i én dimensjon er som kjent beskrevet ved Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{4}$$

der ω er oscillatorens frekvens og m er partikkelens masse. Vi minner også om at energispekteret er gitt ved

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega; \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

med tilhørende egenfunksjoner $\psi_n(x)$. I denne oppgaven vil dere få bruk for de to laveste egentilstandene, som er gitt ved

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= N_0\, e^{-\alpha x^2} && (6) \\ \psi_1(x) &= N_1\, x\, e^{-\alpha x^2} && (7) \\ & && (8) \end{aligned}$$

der N_0 og N_1 er normeringskonstanter og $\alpha = m\omega/(2\hbar)$.

I denne oppgaven skal vi se på en partikkel i en *to-dimensjonal* harmonisk oscillator; potensialtermen i Hamiltonoperatoren er m.a.o. gitt ved

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \tag{9}$$

a) Sett opp den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i en to-dimensjonal harmonisk oscillator og bruk teknikken med separasjon av variable, $\psi(x, y) = F(x) \cdot G(y)$, til å vise at den kan reduseres til to uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger.

b) Vis at energispekteret nå er gitt ved

$$E_n = (n + 1)\,\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{10}$$

(NB! dette krever praktisk talt ingen regning) og bestem degenerasjonsgraden til energinivå n.

c) Skriv ned bølgefunksjonen for grunntilstanden ($n = 0$). Forklar (uten regning!) at de to degenererte tilstandene for $n = 1$ er gitt ved bølgefunksjonene

$$\begin{aligned} \psi_{10}(x, y) &= N_{10}\, x\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} && (11) \\ \psi_{01}(x, y) &= N_{10}\, y\, e^{-\alpha(x^2+y^2)}. && (12) \end{aligned}$$

Hva er normeringskonstanten N_{10} uttrykt ved N_0 og N_1?

Siden potensialet $V(x, y)$ er sentralsymmetrisk, kan vi alternativt se på den to-dimensjonale harmoniske oscillator i *polarkoordinater* (r, ϕ). Vi minner om at transformasjonen mellom kartesiske- og polarkoordinater er gitt ved $x = r\cos\phi$ og $y = r\sin\phi$ og at

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{13}$$

d) Sett opp den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i en to-dimensjonal harmonisk oscillator uttrykt i polarkoordinater. Bruk separasjon av variable, $\psi(r, \phi) = R(r)F(\phi)$, til å utlede vinkelligningen

$$\frac{d^2}{d\phi^2}F(\phi) = \mathrm{konstant} \cdot F(\phi) \equiv -m_l^2 F(\phi) \tag{14}$$

eller med andre ord

$$\hat{L}_z^2 F(\phi) = m_l^2 \hbar^2 F(\phi) \tag{15}$$

der $\hat{L}_z = -i\hbar(\partial/\partial\phi)$. (Radialligningen er mer komplisert, og vi skal ikke løse den her.)

e) Løsningen til vinkelligningen (15) kan skrives som $F(\phi) = N \exp(im_l\phi)$. Vi lar normeringskonstanten N være ubestemt. Siden vinklene ϕ og $\phi + 2\pi$ identifiseres som samme punkt i rommet, må funksjonen $F(\phi)$ ha samme verdi for disse to argumentene (krav om entydighet). Vis hvilke matematiske krav dette gir for de tillatte verdiene av kvantetallet m_l, og at dette medfører kvantisering av L_z.

f) La oss til slutt se på to lineærkombinasjoner av tilstandene (11) og (12),

$$\psi_{1,\pm} = \psi_{10}(x, y) \pm i\psi_{01}(x, y). \tag{16}$$

Fra det generelle resultatet i oppgave 1c vet vi at disse er egentilstander for Hamiltonoperatoren, med samme energi som ψ_{10} og ψ_{01}. Vis at $\psi_{1,\pm}$ dessuten er egentilstander for $\hat{L}_z$ og angi egenverdiene. (Hint: Gjør om ligning (16) til polarkoordinater).