NB!! I spørsmål der det blir bedt om forklaringer/tekstsvar, ønsker vi *korte og konsise* svar!

Oppgave 1: Materiebølger og krystaller

Et par konstanter du kan få bruk for i denne oppgaven: $\hbar c = 197.3\,\text{eVnm}$ og elektronets masse $m_e = 0.511\,\text{MeV/c}^2$.

a) Skriv ned uttrykket for de Broglie-bølgelengden til en massiv, ikke-relativistisk partikkel. Vis at

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_e eU}} \tag{1}$$

for et elektron som er akselerert (med starthastighet null) over en spenning U.

b) Beregn materiebølgelengden for et elektron som er akselerert over en spenning på 54V. Hvorfor er det hensiktsmessig å benytte seg av elektroner (snarere enn f. eks. synlig lys) dersom en ønsker å gjøre interferenseksperiment på atomær skala? (Et eksempel på dette er karakterisering av krystallstrukturer.)

c) Som antydet i forrige delspørsmål er det mulig å analysere atomstrukturen på overflaten til faste stoffer (krystaller) ved hjelp av interferens av materiebølger. Anta at elektroner med kinetisk energi 54 eV sendes vertikalt inn mot overflaten til en nikkelkrystall (se figur 1). Forklar at betingelsen for å detektere maksimal strøm av elektroner i retning θ (definert på figuren) er

$$d\sin\theta = n\lambda \tag{2}$$

der d er avstanden mellom atomene i krystallen, og n er et heltall. For nikkel observeres første maksimum ved $\theta = 50°$. Bruk dette til å beregne gitterkonstanten d.

d) En grunnleggende konsekvens av materiens bølgeegenskaper er som kjent uskarphetsrelasjonen

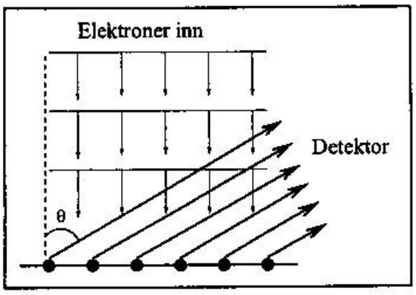
$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3}$$

Skisser (dvs. sett opp de relevante uttrykkene med en kort forklaring) hvordan du ville *beregne* σ_x og σ_p for en partikkel beskrevet av en gitt bølgefunksjon $\Psi(x,t)$.
Hvordan måtte man i prinsippet gått fram for å *måle* størrelsene σ_x og σ_p for et system i denne tilstanden?

Oppgave 2: Kvantemekanikk i tre dimensjoner

Denne oppgaven handler om en partikkel med masse m som beveger seg i tre dimensjoner. I sfæriske koordinater kan Hamiltonoperatoren generelt uttrykkes som

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\widehat{L^2}\right] + V(r,\phi,\theta) \tag{4}$$



Figur 1: (Til oppgave 1c.) Spredning av materiebølger mot overflaten av en krystall. Avstanden mellom naboatomer er d. Hvert atom virker som en punktkilde for de utgående bølgene.

der $V(r,\phi,\theta)$ er potensialet, og

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \tag{5}$$

I første del av oppgaven (**a-d**) skal vi studere en *fri* partikkel. Vi ser på bølgefunksjonen

$$\psi(r,\phi,\theta) = \frac{A}{r}\sin(kr), \tag{6}$$

der A og k er konstanter.

a) Hva er den fysiske tolkningen av operatoren $\widehat{L^2}$ i (5), og hva er dens tillatte egenverdier for en fri partikkel?
Forklar at det totale angulærmoment L for en partikkel som befinner seg i tilstanden (6), er null.

b) Vis at $\psi(r,\phi,\theta)$ i (6) er en egenfunksjon for Hamiltonoperatoren, og finn den tilhørende energien.

c) I det følgende skal vi fortsatt bare se på tilstander med $L = 0$. Vis, ved eksplisitt løsning av Schrödingerligningen, at den mest generelle $L = 0$ løsningen kan uttrykkes som

$$\psi(r,\phi,\theta) = \frac{A}{r}\sin(kr) + \frac{B}{r}\cos(kr), \tag{7}$$

der A, B og k er konstanter.

d) Vis hvorfor vi må kreve $B = 0$ for å få en fysisk akseptabel løsning. Med andre ord er (6) den eneste fysisk akseptable løsningen for en fri partikkel med $L = 0$.

Vi antar nå at partikkelen befinner seg i et sentralsymmetrisk potensial gitt ved

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < r_0 \\ \infty & \phantom{\text{for}} \quad r \geq r_0 \end{cases} \tag{8}$$

e) Vi ser fortsatt på spesialtilfellet $L = 0$ når vi nå skal løse Schrödingerligningen for dette potensialet. Sett opp løsningene i områdene $r < r_0$ og $r > r_0$ og hvilke føringer randbetingelsene i $r = r_0$ gir for konstantene i bølgefunksjonen. Bruk dette til å skrive ned det fullstendige settet med (unormerte) $L = 0$ løsninger, med tilhørende egenenergier. Normer løsningene.

f) Til slutt ser vi på en partikkel som ved tiden $t = 0$ befinner seg i en superposisjon

$$\psi(r, \phi, \theta) = \frac{N}{r}\left[\sin\left(\frac{2\pi r}{r_0}\right) + 2\sin\left(\frac{5\pi r}{r_0}\right)\right]. \tag{9}$$

Bestem normeringskonstanten N. Hvilke mulige resultat kan man få dersom man måler partikkelens energi, og hva er de respektive sannsynlighetene? Vil resultatet avhenge av om partikkelen er et boson eller et fermion?