Oppgave 1 (På kryss og tvers av pensum):

a) Skriv ned dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ til en fri, ikke-relativistisk partikkel. Regn ut gruppe- og fasehastigheten og vis at det er gruppehastigheten som svarer til partikkelens hastighet.

b) Anta at vi har et sett med bølgefunksjoner ψ_{s,m_s} som er egenfunksjoner for det totale spinnet og dets z-komponent, dvs

$$\hat{S}^2\psi_{s,m_s} = \hbar^2 s(s+1)\psi_{s,m_s} \quad (1)$$

$$\hat{S}_z\psi_{s,m_s} = \hbar m_s\psi_{s,m_s}, \quad (2)$$

der $s = 1/2$. Vi ser på superposisjonen

$$\psi(x) = A\sum_{m_s} m_s\psi_{s,m_s} \quad (3)$$

der A er en normeringskonstant.

Hva er de tillatte verdiene for m_s?

Er $\psi(x)$ en egenfunksjon for henholdsvis $\hat{S}^2$ og $\hat{S}_z$? Begrunn svaret.

c) Et nøytron i en atomkjerne kan bevege seg over et område med utstrekning $\sim 5 \cdot 10^{-15}m$. Bruk uskarphetsrelasjonen til å estimere hvilke hastigheter man kan forvente å måle for dette protonet.

d) En partikkel med masse m bevger seg fritt i tre dimensjoner. Skriv ned Hamilton-operatoren for partikkelen og forklar hvorfor de stasjonære tilstandene har skarpt angulærmoment (L^2 og L_z).

Oppgave 2

Vi ser i første omgang på en partikkel i et foreløpig uspesifisert potensial $V(x)$. Det oppgis at de ortonormerte stasjonære bølgefunksjonene er $\{\psi_n(x)\}$, der $n = 1, 2, 3, \cdots$, med tilhørende egenenergier E_n.

Anta at partikkelen befinner seg i superposisjonen

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + \psi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar}\right] \quad (4)$$

a) Skriv ned ortogonalitetsrelasjonen for tilstandene $\{\psi_n(x)\}$.
Vis at $\Psi(x,t)$ i ligning (4) er normert.

b) Vis at forventningsverdien for energien i tilstanden (4) er $\langle E \rangle = \frac{1}{2}(E_3 + E_5)$. Beregn videre $\langle E^2 \rangle$ og den tilsvarende uskarpheten i energi, σ_E.

c) Dersom vi foretar en ideell måling av energien på tilstanden(4), hvilke måleresultater kan vi få? Finn sannsynligheten for å måle henholdsvis E_5, $\frac{1}{2}(E_3 + E_5)$, og E_4.

d) La oss nå i stedet anta at det befinner seg to identiske spinn $\frac{1}{2}$ partikler i vårt potensial $V(x)$. Vi ser bort fra vekselvirkningen mellom partiklene. Konstruer to-partikkel bølgefunksjonen for tilstanden med totalt spinn 1 og total energi $E = E_1 + E_2$.

I resten av oppgaven spesifiserer vi potensialet til å være et uendelig bokspotensial, som til å begynne med har utstrekning fra $x = 0$ til $x = L$. De stasjonære tilstandene og egenenergiene for en partikkel med masse m er da som kjent gitt ved

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{og} \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}. \tag{5}$$

Ved tiden $t = 0$ endres abrupt potensialbrønnen til dobbel bredde ved at høyre 'vegg' nå ligger ved $x = 2L$ (den venstre er fortsatt ved $x = 0$).

e) Skriv ned (uten regning!) egenfunksjonene $\tilde{\psi}_n(x)$ og egenenergiene $\tilde{E}_n$ for det nye potensialet.

f) Anta at en partikkel ved tiden $t = 0$ befinner seg i grunntilstanden til det *gamle* potensialet, dvs. $\psi_1(x)$ fra ligning (5). Dersom vi gjør en ideell måling av energien rett etter $t = 0$, hva er sannsynligheten for å måle $\tilde{E}_1$, dvs grunntilstandsenergien til det nye potensialet?
Hint: I denne regningen må du huske på at $\psi_1(x)$ er lik null i intervallet $L \leq x \leq 2L$.