UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 8. juni
Tid for eksamen: 14.30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 4 (fire) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Hydrogenlike atomer

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn. Vi skal se på hydrogenlike atomer, det vil si atomer hvor *ett* elektron med masse m_e og ladning $-e$ er bundet til en tung kjerne med ladning Ze. Elektronet befinner seg da i et Coulombpotensiale på formen

$$V(\vec{r}) = -\frac{kZ}{r} \quad \text{hvor} \quad k \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \tag{1}$$

a) Forklar hva vi mener med et sentralsymmetrisk potensiale.

For et sentralsymmetrisk potensiale kan løsninger av den tidsuavhengige Scrödingerligningen skrives på den separerte formen

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y_l^{m_l}(\theta, \phi), \tag{2}$$

hvor $Y_l^{m_l}$ er egenfunksjoner for angulærmomentoperatorene $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$,

$$\hat{L}^2 Y_l^{m_l} = \hbar^2 l(l+1) Y_l^{m_l} \quad \text{og} \quad \hat{L}_z Y_l^{m_l} = \hbar m_l Y_l^{m_l}. \tag{3}$$

b) Angi hvilke verdier kvantetallene l og m_l kan ta, og gi en fysisk tolkning av de tilhørende egenverdiene. Vi har ikke her antatt noe om det sentralsymmetriske potensialet. Hvilken videre begrensning får vi for kvantetallene med Coulombpotensialet?

c) Skriv opp Schrödingerligningen for tre-dimensjoner. Gi de stasjonære løsningene og den tidsuavhengige Schrödingerligningen, og vis at radialfunksjonen $R(r)$ for det hydrogenlike atomet må oppfylle radialligningen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2Z}{ra_0} + \frac{2m_e E}{\hbar^2} \right) R(r) = 0, \tag{4}$$

hvor $a_0 = \hbar^2/m_e k$ er Bohrradien. *Hint:* Du kan bruke operatorrelasjonen

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}. \tag{5}$$

d) Vis at

$$R(r) = N r^{n-1} e^{-\frac{\beta r}{n}}, \tag{6}$$

er en løsning av radialligningen (4), og angi hvilke betingelser dette setter for β, n og E_n. *Hint:* Siden ligningen du får må være oppfylt for alle r, må den være oppfylt separat for alle potenser av r.

e) Skriv opp normeringsbetingelsen for $\psi(\vec{r})$, og gi sannsynlighetstolkningen av $\psi(\vec{r})$. Anta i det følgende at $Y_l^{m_l}$ er normert separat, og vis fra dette at $R(r)$ må tilfredsstille betingelsen

$$\int_0^\infty r^2 |R(r)|^2 \, dr = 1. \tag{7}$$

f) Bruk normeringsbetingelsen til å bestemme N. *Hint:* Du kan få bruk for det følgende integralet

$$\int_0^\infty z^k e^{-z}\, dz = k! \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

g) Skriv opp uttrykket for forventningsverdien for avstanden til kjernen $\langle r \rangle$, og vis at resultatet kan skrives som

$$\langle r \rangle = n \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{a_0}{Z}. \tag{9}$$

Diskuter kort hvordan dette resultatet kan sies å forklare hvorfor Bohrs idé om baner for elektronene fungerte så godt.

Oppgave 2 Baryoner

Baryoner er bundne tilstander av tre kvarker, f.eks. protoner (uud) og nøytroner (udd). Vi vil her anta at kvarkene er fanget i en uendelig endimensjonal potensialbrønn fra $x = 0$ til $x = L$, men ikke vekselvirker inne i baryonet. Dette er faktisk en ganske god tilnærming, så lenge separasjonen mellom kvarkene er liten.

På forelesningene har vi har sett at egenfunksjonene til energien til en partikkel med masse m i et slikt potensiale er

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right), \tag{10}$$

inne i brønnen og null utenfor, med egenverdier

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \tag{11}$$

a) Finn uskarpheten σ_x for posisjonen til en kvark inne i protonet. *Hint:* Et av integralene du trenger har en lett løsning fra symmetri. For det andre kan du få bruk for

$$\int y^2 \sin^2 y\, dy = \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{4} \cos 2y + \frac{1}{8}(1 - 2y^2) \sin 2y. \tag{12}$$

b) Bruk Heisenbergs uskarphetsrelasjon til å estimere uskarpheten for hastigheten til en høyt eksitert kvark inne i protonet (stor n). Regn ikke-relativistisk. Anta at størrelsen på protonet er omlag $L = 1.6\,\mathrm{fm}$ og at de bundne kvarkene har en effektiv masse på $m = 300\,\mathrm{MeV/c^2}$. Om du ikke har fått til **a)**, bruk at vi må ha $\sigma_x \leq L$. Kommenter svaret.

c) Formuler Paulis eksklusjonsprinsipp.

d) Med utgangspunkt i at kvarker er spinn–$\frac{1}{2}$ fermioner, og at protonet er et fermion med (totalt) spin–$\frac{1}{2}$, forklar hvorfor rom-delen av tre-partikkelbølgefunksjonen for grunntilstanden til kvarkene kan skrives som

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3), \tag{13}$$

hvor de to oppkvarkene er i spin-singlet tilstanden.

e) Med den antagelsen vi gjorde tidligere for størrelsen på protonet og den effektive massen til de bundne kvarkene, finn energien til grunntilstanden for de tre kvarkene.

f) Hvis vi antar at et foton treffer en kvark inne i protonet som vi nå betrakter som fri, hvor stor energi må fotonet ha for at vi kan observere Comptonspredning på kvarken dersom vi antar at vi kan måle bølgelengden med 1% nøyaktighet? Fortsett å anta en effektiv masse for kvarkene på $m = 300\,\mathrm{MeV/c^2}$.