UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 11. juni 2012
Tid for eksamen: 14.30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 4 (fire) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Partikler i tre-dimensjonal boks

Vi ser på en partikkel med masse m innestengt i en tre-dimensjonal boks (også kalt uendelig tre-dimensjonal brønn) med sider av lengde (L_1, L_2, L_3). Potensialet er null inne i boksen og uendelig utenfor.

Ved å bruke separasjon av variable i kartesiske koordinater finner man at egentilstandene til Hamiltonoperatoren er et produkt av tre egentilstander for en partikkel i en en-dimensjonal boks:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{\pi n_3}{L_3} z\right), \quad (1)$$

hvor $n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \ldots$, med de tilhørende energiene

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2 \right]. \quad (2)$$

a) Finn partikkelens energi E_0 i grunntilstanden. Anta at dette dreier seg om et elektron med masse $m_e = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$, og at sidekantene på boksen er $L_1 = L_2 = L$ og $L_3 = L/2$, hvor $L = 2.0\,\mathrm{nm}$. [2 poeng]

b) Finn partikkelens energi i det første eksiterte nivået uttrykt ved E_0. Angi eksplisitt for hvilke kombinasjoner av kvantetallene (n_1, n_2, n_3) denne energien oppstår. Hva menes med at et energinivå er *degenerert* og hva er *degenerasjonsgraden* til det første eksiterte nivået? [4 poeng]

c) Forklar kort hva Paulis eksklusjonsprinsipp sier og finn, uttrykt ved E_0, den laveste energien som et system av seks elektroner kan ha i boksen vi har beskrevet over. Vi antar her at vi kan se bort fra Coulomb-vekselvirkninger mellom elektronene. [4 poeng]

d) Vi antar nå at partiklene er identiske partikler med samme masse som elektronet, men at de er bosoner. Hva er da den laveste energien? Hva blir den laveste energien dersom vi antar at partiklene er fermioner med spinn $s = 3/2$? [3 poeng]

Oppgave 2 Harmonisk oscillator

En partikkel med masse m beveger seg i et endimensjonalt potensial $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ og prepareres ved tiden $t = 0$ i tilstanden

$$\Psi(x, 0) = f(x) e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}, \quad (3)$$

hvor $f(x)$ er symmetrisk med hensyn på $x = 0$ (origo).

a) Hva slags betingelse kan du sette på $f(x)$ på grunn av normeringen av bølgefunksjonen? [2 poeng]

b) Vis at forventningsverdien for posisjonen x ved tiden $t = 0$ er $\langle x \rangle_0 = 0$. [3 poeng]

c) Finn forventningsverdien for bevegelsesmengden ved $t = 0$, $\langle p \rangle_0$. *Hint:* Den deriverte av en symmetrisk funksjon har også en bestemt symmetriegenskap. [4 poeng]

Vi spesifiserer nå at funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \tag{4}$$

altså grunntilstanden til harmonisk oscillator-potensialet. En stor porsjon tolmodig algebra viser da at

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x,0) = \left(\frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} - \frac{2im\omega p_0 x}{\hbar^2} - \frac{m\omega}{\hbar} - \frac{p_0^2}{\hbar^2}\right)\Psi(x,0), \tag{5}$$

som du kan anta i resten av oppgaven.

d) Er begynnelsestilstanden $\Psi(x,0)$ en energiegentilstand? [3 poeng]

e) Vis at forventningsverdien for energien ved $t = 0$ er $\langle E \rangle_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{p_0^2}{2m}$. [4 poeng]

f) Vis ved hjelp av den tidsavhengige Schrödingerligningen at forventningsverdien for energien er tidsuavhengig, altså at $\frac{d}{dt}\langle E \rangle = 0$, slik at svaret i forrige oppgave gjelder for alle tider. [3 poeng]

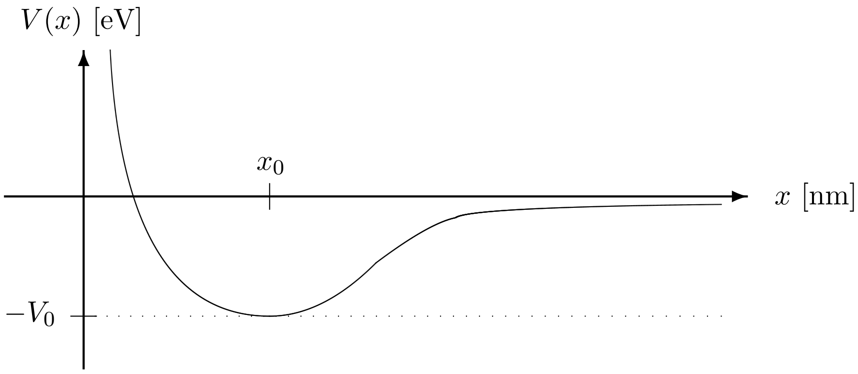
g) Finn sannsynligheten for at du i en måling av energien til $\Psi(x,t)$ måler akkurat energien for grunntilstanden til den harmoniske oscillator. *Hint:* Du kan få bruk for integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/4a} \quad \text{hvis} \quad \mathcal{R}e(a) > 0. \tag{6}$$

[4 poeng]

h) Et diatomisk molekyl har et potensiale sett fra det ene atomets side som vist i figur 1. Når, og hvorfor, er en harmonisk oscillator en god tilnærming til dette potensialet? [2 poeng]

i) Anta at det ene atomet starter i tilstanden $\Psi(\rho,0)$ gitt ved (3) og (4), hvor $\rho = x - x_0$. Hva kan du si dersom $p_0 \gg \sqrt{2mV_0}$? [2 poeng]



Figur 1: Skisse av potensialet for et diatomisk molekyl.