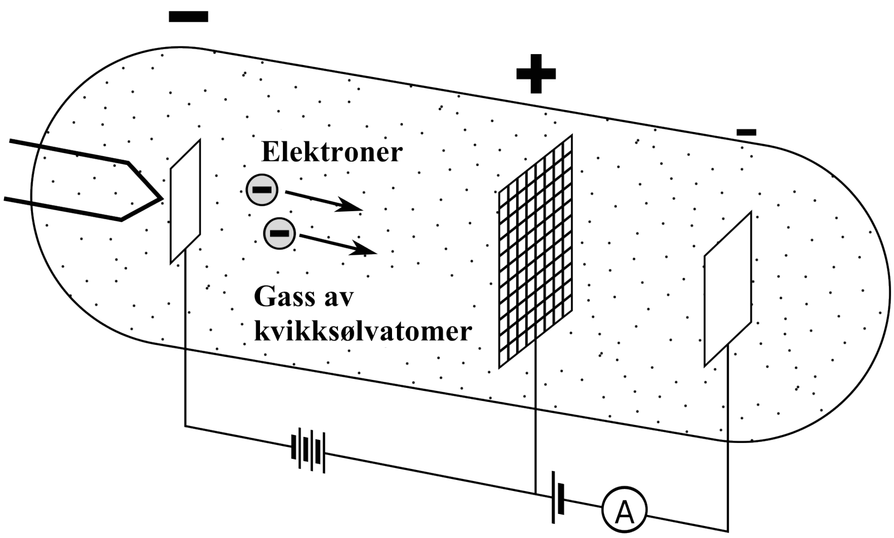
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 11. juni 2013
Tid for eksamen: 14.30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 4 (fire) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Franck-Hertz eksperimentet
Med utgangspunkt i skissen i figuren under, gi en konsis beskrivelse av Franck-Hertz eksperimentet, dets resultater og betydning for kvantefysikken. [20 poeng]



Figur 1: Skisse av Franck-Hertz eksperimentet. Hentet fra Wikimedia Commons.

Oppgave 2 Tre-dimensjonal harmonisk oscillator
En partikkel med masse m beveger seg i et tre-dimensjonalt harmonisk oscillator potensial gitt ved

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2). \tag{1}$$

a) Sett opp den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i potensialet over, beskrevet ved bølgefunksjonen $\psi(x, y, z)$. [2 poeng]

b) Hva er enheten til $|\psi(x, y, z)|^2$? Gi en begrunnelse. [3 poeng]

c) Angi normeringsbetingelsen for $\psi(x, y, z)$. [3 poeng]

d) Bruk teknikken med separasjon av variable for posisjonskoordinatene til bølgefunksjonen, $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, til å vise at den tidsuavhengige Schrödingerligningen for vårt potensial kan reduseres til tre uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger. [6 poeng]

e) Vis at de tillatte energiene er gitt ved

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \tag{2}$$

og angi hva slags verdier som er mulig for n. [4 poeng]

f) Forklar begrepet degenerasjon og bestem degenerasjonsgraden til nivå n i vårt potensiale. *Hint:* Fra kombinatorikken har vi at (se f.eks. Rottmann):

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3}$$

[4 poeng]

Vi minner om at grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden til en én-dimensjonal harmonisk oscillator kan skrives på formen

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2}, \tag{4}$$

$$\psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha x^2}, \tag{5}$$

hvor A_0 og A_1 er to normeringskonstanter og $\alpha = m\omega/2\hbar$.

g) Vis at grunntilstanden, $\psi_{000}(x, y, z)$, og en av de første eksiterte tilstandene, $\psi_{001}(x, y, z)$, til en tre-dimensjonal harmonisk oscillator kan skrives som

$$\psi_{000}(x, y, z) = A_{000}\, e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_{000}\, e^{-\alpha r^2}, \tag{6}$$

$$\psi_{001}(x, y, z) = A_{001}\, z e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_{001}\, r \cos\theta\, e^{-\alpha r^2}, \tag{7}$$

hvor A_{000} og A_{001} er to konstanter, og de sfæriske koordinatene (kulekoordinatene) er gitt ved

$$x = r \cos\phi \sin\theta, \tag{8}$$

$$y = r \sin\phi \sin\theta, \tag{9}$$

$$z = r \cos\theta. \tag{10}$$

[4 poeng]

h) Finn A_{000} og A_{001} og vis at

$$\frac{A_{001}}{A_{000}} = 2\sqrt{\alpha}. \tag{11}$$

Merk: Dersom du ikke får til hele denne oppgaven, oppgi gjerne svarene i senere oppgaver med A_{000} og A_{001}.
Hint: Det følgende integralet kan være nyttig

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} x^k\, dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \text{ for } \lambda > 0, \tag{12}$$

hvor Γ–funksjonen har disse egenskapene: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. [6 poeng]

i) Vis at forventningsverdien for avstanden til origo, $\langle r \rangle$, for grunntilstanden ψ_{000} er

$$\langle r \rangle = \left(\frac{4\hbar}{\pi m \omega} \right)^{1/2}. \tag{13}$$

[5 poeng]

j) Hvis vi for et øyeblikk underholder oss med idéen om at vi kan modellere elektronet i hydrogenatomet med vårt potensial (til tross for at det definitivt ikke er et Coulomb-potensial), hvilken verdi må vi velge for vinkelfrekvensen ω for at energiforskjellen mellom det laveste og det nest laveste energinivået skal være den samme som for hydrogenatomet? Hva slags forventningsverdi gir dette for avstanden til kjernen, og hvordan stemmer dette med verdien for hydrogen som er $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0$, hvor $a_0 = 0.0529$ nm er Bohrradiusen? [6 poeng]

k) Hvor mange spinn–1/2 fermioner, som for eksempel elektroner, kan du sette inn i de to laveste energinivåene sammenlignet med de to laveste energinivåene til hydrogenatomet? Anta at de ikke vekselvirker. Hva med spinn–1 partikler? [4 poeng]

l) Vis at ψ_{001} er en egenfunksjon til både $\hat{L}^2$ (angulærmomentoperatoren) og $\hat{L}_z$ (operatoren for z–komponenten til angulærmomentet), og finn egenverdiene. *Hint:* Hvis du vil bruke sfæriske koordinater så minner vi om at

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right], \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{14}$$

[5 poeng]

m) Finnes det flere tilstander med energien E_1 som er egentilstander til både $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ for dette potensialet? Begrunn svaret. [4 poeng]

n) Vi preparerer til slutt systemet i en begynnelsestilstand

$$\Psi(r, \phi, \theta, 0) = \sqrt{2\alpha}\, r\, \psi_{000} \sin\theta\, e^{i\phi}. \tag{15}$$

Hva er sannsynligheten for å observere systemet i tilstanden ψ_{100} på et senere tidspunkt? [4 poeng]