UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 10. juni
Tid for eksamen: 09.00 (4 timer)
Oppgavesettet er på fem (5) sider
Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler:	Rottman: "Matematisk formelsamling" Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter" Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter" Godkjent kalkulator Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Hydrogenatom for kjemikere

I denne oppgaven skal vi se på hydrogenatomet. Vrien i år er at vi skal skrive løsningen av Schrødingerligningen på en måte som kjemikere liker bedre. Vi ser bort fra spinn i denne oppgaven.

Løsningen av den tidsuavhengige Schrødingerligningen for hydrogenatomet er som kjent

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi), \tag{1}$$

hvor $R_{nl}(r)$ er løsningene av den tilhørende radialligningen og $Y_l^m(\theta,\phi)$ er de sfæriske harmoniske. Her bruker vi sfæriske koordinater

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \tag{2}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi, \tag{3}$$
$$z = r\cos\theta. \tag{4}$$

Vi gir de eksplisitte uttrykkene for de enkleste av disse funksjonene i Tabell 1.

$R_{nl}(r)$	$Y_l^m(\theta,\phi)$
$R_{10}(r) = Ae^{-r/a}$	$Y_0^0(\theta,\phi) = B$
$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{8}}A\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a}$	$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{3}B\cos\theta$
$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24}}A\frac{r}{2a}e^{-r/2a}$	$Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{2}}B\sin\theta e^{\pm i\phi}$

Tabell 1: Oversikt over de enkleste radialfunksjonene for hydrogenatomet, R_{nl}, samt de sfæriske harmoniske, Y_l^m. A og B er to normeringskonstanter og a er Bohrradien.

Vi begynner med litt generelle spørsmål.

a) Hva slags verdier kan kvantetallene n, l og m ta for hydrogenatomet? [3 poeng]

b) Gi normeringsbetingelsen for bølgeunksjonen ψ_{nlm}. Vi antar separat normering av R og Y. Vis at normeringsbetingelsen for R er gitt ved

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\, dr = 1. \tag{5}$$

[4 poeng]

c) Hva er enheten til $R(r)$? Gi en begrunnelse. [4 poeng]

d) Finn normeringskonstantene A og B. *Hint:* Du kan få bruk for følgende integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx = n!\,\lambda^{-(n+1)}. \tag{6}$$

[4 poeng]

e) Forklar hva vi mener med degenerasjon. Bestem degenerasjonsgraden til hydrogen som funksjon av n. *Hint:* Fra kombinatorikken har vi at (se for eksempel Rottmann)

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{7}$$

[6 poeng]

Vi definerer så en ny type funksjon $X_{lm}(\theta, \phi)$ som er lineærkombinasjoner av de sfæriske harmoniske:

$$X_{lm} = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{2}}[Y_l^m - (-1)^m Y_l^{-m}] & \text{hvis } m < 0 \\ Y_l^0 & \text{hvis } m = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[Y_l^{-m} + (-1)^m Y_l^m] & \text{hvis } m > 0 \end{cases}. \tag{8}$$

f) Vis at

$$X_{11}(\theta, \phi) = \sqrt{3} B \sin\theta \cos\phi \quad \text{og} \quad X_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{3} B \sin\theta \sin\phi. \tag{9}$$

[4 poeng]

g) Forklar hvorfor $R_{21}X_{11}$, $R_{21}X_{10}$ og $R_{21}X_{1,-1}$ er egentilstander til Hamiltonoperatoren til hydrogenatomet. [3 poeng]

h) Hva slags verdier for (kvadratet av) angulærmomentet, L^2, kan du få dersom du måler et hydrogenatom i tilstanden $R_{21}X_{11}$? [3 poeng]

i) Er $R_{21}X_{11}$ en egentilstand til $\hat{L}_z$? Hva med $\hat{L}_x$? Begrunn svaret. [4 poeng]

j) Hva er sannsynligheten for at du måler verdien $-\hbar$ for z-komponenten til angulærmomentet til et hydrogenatom som er preparert i tilstanden $\Psi(\vec{r}, 0) = R_{21}(r)X_{11}(\theta, \phi)$? [2 poeng]

k) De sfæriske harmoniske kan skrives som

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \tag{10}$$

hvor N_l^m er normeringskonstanter, og hvor $P_l^m(x)$ er de assosierte Legendrepolynomene som er reelle funksjoner av x. Vi har også at $N_l^m = N_l^{-m}$ og $P_l^m = (-1)^m P_l^{-m}$. Bruk dette til å vise at dersom man skriver løsningene for hydrogenatomet på formen $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)X_{lm}(\theta, \phi)$, så er bølgefunksjonen alltid en reell funksjon. [5 poeng]

Oppgave 2 Opprullet dimensjon

I denne oppgaven skal vi se på kvantemekanikk i to romdimensjoner, men hvor en av de to dimensjonene er en sluttet sirkel med omkrets L. Vi bruker koordinatene (x, u) hvor $x \in \mathbb{R}$ og $u \in [0, L]$. Vi vil i denne oppgaven bruke et vanlig uendelig brønn potensial

$$V(x,u) = \begin{cases} 0 & \text{dersom } 0 < x < a \\ \infty & \text{ellers} \end{cases} . \tag{11}$$

a) Forklar hvorfor Schrødingerligningen i to dimensjoner da skrives som

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)\Psi(x,u,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,u,t). \tag{12}$$

når $0 < x < a$. [3 poeng]

b) Hva slags grensebetingelse må vi bruke for bølgefunksjonen i u-retningen? [2 poeng]

Vi antar nå separasjon av variable, altså at løsningene $\psi(x,u)$ av den tidsuavhengige Schrødingerligningen kan skrives som produktet $\psi(x,u) = X(x)U(u)$.

c) Vis at de følgende uttrykkene for funksjonene X og U gir oss løsninger av den tidsuavhengige Schrødingerligningen for $0 < x < a$:

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x) \quad \text{og} \quad U(u) = Ce^{ik_u u}. \tag{13}$$

[4 poeng]

d) Bruk grensebetingelsene for $\psi(x,u)$ til å vise at $B = 0$,

$$k_x = \frac{\pi n_x}{a}, \tag{14}$$

hvor $n_x = 1, 2, 3 \ldots$, og

$$k_u = \frac{2\pi n_u}{L}, \tag{15}$$

hvor $n_u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. [6 poeng]

e) Vis at energien kan skrives ved hjelp av kvantetallene n_x og n_u som

$$E_{n_x n_u} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left[n_x^2 + \left(\frac{2a}{L}\right)^2 n_u^2\right]. \tag{16}$$

[4 poeng]

f) Hva er energien til grunntilstanden i dette potensialet, og hvor mange elektroner kan befinne seg i den? Hvor mange kan finnes i tilstanden(e) med nest lavest energi? Anta at bredden av brønnen er $a = 1\,\text{nm}$. Massen til et elektron er $m = 0.511\,\text{MeV/c}^2$. [6 poeng]

g) Bruk normeringskravet til $\psi(x, u)$ for å vise at $AC = \sqrt{2/aL}$ slik at den fullstendige løsningen blir

$$\psi_{n_x n_u}(x, u) = \sqrt{\frac{2}{aL}} \sin{(k_x x)} e^{ik_u u}. \tag{17}$$

[4 poeng]

h) Finn forventningsverdien til p_x^2 for tilstanden $\psi_{n_x n_u}(x, u)$. [3 poeng]

i) I grensen $L \ll a$ viser ligning (16) hva som skjer dersom det eksisterer små ekstra opprullede dimensjoner i verden. Vi minner om at energien for en uendelig brønn i en vanlig dimensjon er

$$E_{n_x} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n_x^2. \tag{18}$$

Gitt at størrelsen på denne ekstra dimensjonen er $L = 10^{-3}$ nm, hvor mye energi trenger jeg for å eksitere et elektron i den nye dimensjonen? [3 poeng]

j) Hvor mye ekstra effektiv masse (hvileenergi) ser det ut som et elektron som er eksitert i den ekstra dimensjonen har? *Hint:* Ta utgangspunkt i Einsteins formel for relativistisk energi i en vanlig dimensjon $E^2 = p_x^2 c^2 + m^2 c^4$. [3 poeng]