UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 8. juni 2015
Tid for eksamen: 09.00 (4 timer)
Oppgavesettet er på fem (5) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Variasjoner over hydrogen

Løsningen av den tidsuavhengige Schrødingerligningen for potensialet til hydrogenatomet

$$V(r) = -\frac{k_e e^2}{r}, \tag{1}$$

er som kjent

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi), \tag{2}$$

hvor $R_{nl}(r)$ er løsningene av den tilhørende radialligningen og $Y_l^m(\theta, \phi)$ er de sfæriske harmoniske. Disse løsningene har energiene[1]

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2} = -13.6 \text{ eV } \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

hvor

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.0529 \text{ nm}, \tag{4}$$

er Bohrradien og $m_e = 0.511$ MeV/c^2 er massen til elektronet.[2]

Vi bruker sfæriske koordinater

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi, & (6)\\ y &= r \sin\theta \sin\phi, & (7)\\ z &= r \cos\theta, & (8) \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, & (9)\\ \hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. & (10) \end{aligned}$$

a) Gi normeringsbetingelsen for bølgefunksjonene ψ_{nlm} i kartesiske og sfæriske koordinater. [4 poeng]

b) Vi antar separat normering av R_{nl} og Y_l^m. Vis at normeringsbetingelsen for Y_l^m da er

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi = 1. \tag{11}$$

[4 poeng]

c) Y_0^0 er en konstant. Vis at den er gitt ved $Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. [4 poeng]

---

[1] Under tilnærmingen at protonmassen er uendelig stor.

[2] Skal man ta hensyn til den enedelige massen til protonet må man i stedet bruke den reduserte massen

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}, \tag{5}$$

hvor m_p er protonmassen.

Bølgefunksjonen til grunntilstanden kan skrives

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = N_{100} e^{-r/a_0}, \tag{12}$$

hvor N_{100} er en normeringskonstant.

d) Finn N_{100}. *Hint:* Du kan få bruk for følgende integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx = n!\, \lambda^{-(n+1)}. \tag{13}$$

[5 poeng]

e) Finn forventningsverdien for kinetisk energi $\langle K \rangle$ for tilstanden ψ_{100}. Vi vil ha den numeriske verdien også. [8 poeng]

f) Finn forventningsverdien for den potensielle energien $\langle V \rangle$ for tilstanden ψ_{100}. Vi vil ha den numeriske verdien. [2 poeng]

Nøyaktig det samme potensialet som for hydrogenatomet vil finnes mellom et elektron og et positivt ladet positron (antipartikkelen til elektronet). Disse kan også inngå i en bundet tilstand som vi kaller *positronium.* Riktignok så finnes det en sannsynlighet for at elektronet og positronet interagerer og utsletter hverandre ved å bli til fotoner, så positronium lever ikke så lenge.

g) Vis at energinivåene til positronium er gitt ved

$$E_n = -\frac{m_e k_e^2 e^4}{4\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

[3 poeng]

h) Positronium i grunntilstanden ψ_{100} kan finnes i en spinn-singlet-tilstand, hvor spinnet til elektronet og positronet er motsatt rettet, eller i en tripplett, hvor de er rettet i samme retning. Hvor mange fotoner kan man få ved annihilasjon av elektron–positron-paret for hver av de to tilstandene? *Hint*: Fotoner har spinn–1. [4 poeng]

Oppgave 2 Harmonisk oscillator i to dimensjoner

En partikkel med masse m beveger seg i et to-dimensjonalt harmonisk oscillatorpotensial gitt ved

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2), \tag{15}$$

og beskrives ved hjelp av en bølgefunksjon $\psi(x, y)$.[3] Vi minner om at grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden til en én-dimensjonal harmonisk

[3]Det finnes spennende fysiske eksempler på bevegelse begrenset til to dimensjoner, f.eks. er elektronene i grafen fanget på en to-dimensjonal overflate.

oscillator kan skrives på formen

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2}, \tag{16}$$

$$\psi_1(x) = 2\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2}, \tag{17}$$

hvor $\alpha = m\omega/2\hbar$.

a) Hva er enheten til $|\psi(x,y)|$? Gi en begrunnelse. [3 poeng]

b) Anta separasjon av variable for bølgefunksjonen, $\psi(x,y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$, og vis at den tidsuavhengige Schrödingerligningen i to dimensjoner

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) + V(x,y)\psi(x,y) = E\psi(x,y), \tag{18}$$

da kan skrives som to uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger for $\psi_x(x)$ og $\psi_y(y)$ med hvert sitt harmonisk oscillator-potensial og hver sin energi E_x og E_y. [6 poeng]

c) Vis at de tillatte energiene er gitt ved

$$E_n = \hbar\omega\,(n+1)\,, \tag{19}$$

og angi hva slags verdier som er mulige for n. [4 poeng]

d) Definer begrepet degenerasjon og bestem degenerasjonsgraden til energinivå n i vårt potensial. [4 poeng]

e) Hvor mange spinn–$\frac{1}{2}$-fermioner, for eksempel elektroner, kan du sette inn i de to laveste energinivåene? Anta at de ikke vekselvirker. [2 poeng]

f) Forklar hvorfor tilstandene

$$\psi_{00}(x,y) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2}, \tag{20}$$

$$\psi_{10}(x,y) = 2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} x e^{-\alpha r^2}, \tag{21}$$

$$\psi_{01}(x,y) = 2\left(\frac{2\alpha^4}{\pi}\right)^{1/2} y e^{-\alpha r^2}, \tag{22}$$

hvor $r^2 = x^2 + y^2$, er løsninger av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for det to-dimensjonale harmonisk oscillator-potensialet. [4 poeng]

g) Vis at tilstandene

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10} \pm i\psi_{01}), \tag{23}$$

er egentilstander for operatoren $\hat{L}_z = -i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)$ og finn egenverdiene. [6 poeng]

h) Finn uskarphetsrelasjonen mellom energien E og L_z. [6 poeng]

i) Vi preparerer systemet i begynnelsestilstanden

$$\Psi(x, y, 0) = \psi_{10}(x, y). \tag{24}$$

Hva er sannsynligheten for å observere en verdi $L_z = \hbar$ for angulærmomentet på et senere tidspunkt? Og hvilken tilstand vil systemet være i da? [4 poeng]

j) Dersom vi har en partikkel med ladning q og masse m som er begrenset til å bevege seg i xy–planet, med et magnetfelt $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ perpendikulært på planet, vil det gi følgende potensial

$$V = -\frac{qB_0}{2m}L_z + \frac{q^2B_0^2}{8m}(x^2 + y^2). \tag{25}$$

Finn løsningene av den tidsuavhengige Schrödingerligningen og de tilhørende energiene for dette potensialet. *Merk:* Det holder at du skriver ned de tre egentilstandene med lavest energi og forklarer hvordan de andre kan konstrueres. [7 poeng]