UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Eksamensdag: 13. juni 2016
Tid for eksamen: 09.00 (4 timer)
Oppgavesettet er på fem (5) sider
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottman: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Angell og Lian: "Fysiske størrelser og enheter"
Godkjent kalkulator
Ett A4 ark med egne notater (begge sider av arket)

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Gravitasjonsbølger

Gravitasjonsbølger ble nylig oppdaget av LIGO-eksperimentet.[1] Vi skal her anta at gravitasjon skyldes en partikkel, gjerne kalt gravitonet, som har en masse m_g. Under vil du få bruk for at en relativistisk partikkel med masse m har energi $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, hvor p er bevegelsesmengden.

a) Bruk de Broglies relasjoner for energi og bevegelsesmengde til å vise at et relativistisk graviton har dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2}, \tag{1}$$

når vi beskriver det som en bølge. Her er $\lambda_g = \frac{h}{m_g c}$ Comptonbølgelengden til gravitonet. [6 poeng]

b) Vis at gruppehastigheten v_g til gravitasjonsbølgen er gitt ved

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g k}\right)^2}}. \tag{2}$$

[4 poeng]

c) Eksperimentet som oppdaget gravitasjonsbølger satte samtidig en effektiv nedre grense på gruppehastigheten til gravitasjonsbølgene i forhold til lyshastigheten på

$$1 - \frac{v_g}{c} < 5 \cdot 10^{-21}. \tag{3}$$

Disse bølgene hadde en bølgelengde på $\lambda \simeq 10^6$ m. Bruk dette til å sette en omtrentlig nedre grense på Comptonbølgelengden λ_g. Hva blir grensen på massen til gravitonet gitt i eV/c^2? *Hint:* Det lønner seg å bruke rekkeutvikling, for eksempel så er

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \ldots. \tag{4}$$

[6 poeng]

d) Forklar kort hva Heisenbergs uskarphetsrelasjon for posisjon og bevegelsesmengde sier. [5 poeng]

e) LIGO-eksperimentet er omlag 4 km langt. (Ja, du leste riktig!) Bruk Heisenbergs uskarphetsrelasjon til å estimere hvor godt bevegelsesmengden til gravitonene kan bestemmes (i prinsippet) gitt i enheten eV/c. Kommenter også hva slags konsekvenser dette har (om noen) for bestemmelse av bølgelengden. [4 poeng]

[1] B.P. Abbott *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016).

Oppgave 2 Hydrogen og π

I det følgende skal vi bruke sfæriske koordinater for å regne på hydrogen:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi, && (5)\\
y &= r\sin\theta\sin\phi, && (6)\\
z &= r\cos\theta. && (7)
\end{aligned}
$$

Vi minner om at

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, && (8)\\
\hat{L}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], && (9)\\
\hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. && (10)
\end{aligned}
$$

Coulombpotensialet som virker mellom et elektron og et proton er

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{11}$$

hvor styrken til vekselvirkningen er gitt ved

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44\,\mathrm{eV\,nm}. \tag{12}$$

Vi vet at de stasjonære tilstandene til hydrogen da har energiene

$$E_n = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

hvor $a_0 = \frac{\hbar^2}{mk} = 0.0529$ nm er Bohrradien.

a) Skriv ned hamiltonoperatoren for hydrogen. Hvilke to hoveddeler består den av? [3 poeng]

b) Hva er egenfunksjonene og egenverdiene til denne hamiltonoperatoren? Vi er ikke ute etter formler, men hva de er for noe. [4 poeng]

c) Vis at hamiltonoperatoren kan skrives som

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \hat{L}^2\right] + V(r). \tag{14}$$

[4 poeng]

d) Forklar hvorfor den laveste mulige energien for de stasjonære tilstandene til hydrogen, for en gitt verdi av det asimutale kvantetallet l, er

$$E_l^{\min} = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{(l+1)^2}. \tag{15}$$

[4 poeng]

Vi skal se på en tilnærming til løsningen av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for hydrogen som er gitt ved funksjonene

$$\psi_{\alpha lm}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r^2} Y_l^m(\theta,\phi), \tag{16}$$

hvor A er en normeringskonstant, $\alpha > 0$ er en reell parameter, og Y_l^m er de sfæriske harmoniske. Merk at α ikke er det samme som hovedkvantetallet n i de eksakte løsningene. For å lette regningen i det som følger oppgir vi forventningsverdiene for r^n for disse tilstandene (men regn de gjerne ut selv dersom det blir kjedelig på eksamen):

$$\langle r^n \rangle = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(l+\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}, \tag{17}$$

når $l+\frac{n}{2}+\frac{3}{2} > 0$, hvor $\Gamma(n)$ er gammafunksjonen med de viktige egenskapene $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1) = n!$ når n er et heltall, $\Gamma(1) = 1$ og $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

e) Er tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ egentilstander til $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$? Finn i tilfelle egenverdiene. [4 poeng]

f) Skriv ned normeringsbetingelsene for disse tilstandene dersom du antar separat normering for radialdel og vinkeldel. [4 poeng]

g) Finn normeringskonstanten A for en generell l og α. [6 poeng]

h) Vis at forventningsverdien for den potensielle energien $\langle V \rangle$ for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ er

$$\langle V \rangle = -k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{18}$$

[2 poeng]

i) Vis at

$$\hat{H}\psi_{\alpha lm} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[2\alpha(2l+3) - 4\alpha^2 r^2 - \frac{2mk}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right]\psi_{\alpha lm}. \tag{19}$$

[6 poeng]

j) Er tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ stasjonære tilstander for hydrogen? [2 poeng]

k) Vis at forventningsverdien til energien for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ er

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\left(l+\frac{3}{2}\right)2\alpha - k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{20}$$

[7 poeng]

Det viser seg at dersom man minimaliserer forventningsverdien for energien i (20) med hensyn på parameteren α i tilnærmingen så får man uttrykket

$$\langle E \rangle_{\text{min}} = -\frac{k}{2a_0} \frac{1}{(l+\frac{3}{2})} \left(\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} \right)^2 . \tag{21}$$

l) Sammenlign numerisk forholdet mellom energiene for tilnærmingen i (21) med energiene for de vanlige stasjonære tilstandene i (15). Bruk noen (lave) verdier av l. Hva tror du skjer når $l \to \infty$? [4 poeng]

m) Finn standardavviket σ_{r^2} til r^2 for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ og forholdet $\sigma_{r^2}/\langle r^2 \rangle$. Kommenter forholdet i grensen $l \to \infty$. Hva har dette å si for posisjonen til elektronet? [5 poeng]

Tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ i denne oppgaven ble nylig brukt i en artikkel av Friedmann og Hagen[2] for å finne en tilnærming til π som er identisk med en tidligere formel funnet av Wallis[3]. Svaret i oppgave **l)** kan omskrives til et uttrykk for π som kan gjøres vilkårlig presist.

[2] T. Friedmann and C.R. Hagen, *Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π*, Journal of Mathematical Physics 56, 112101 (2015).
[3] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, (Oxford, 1655).