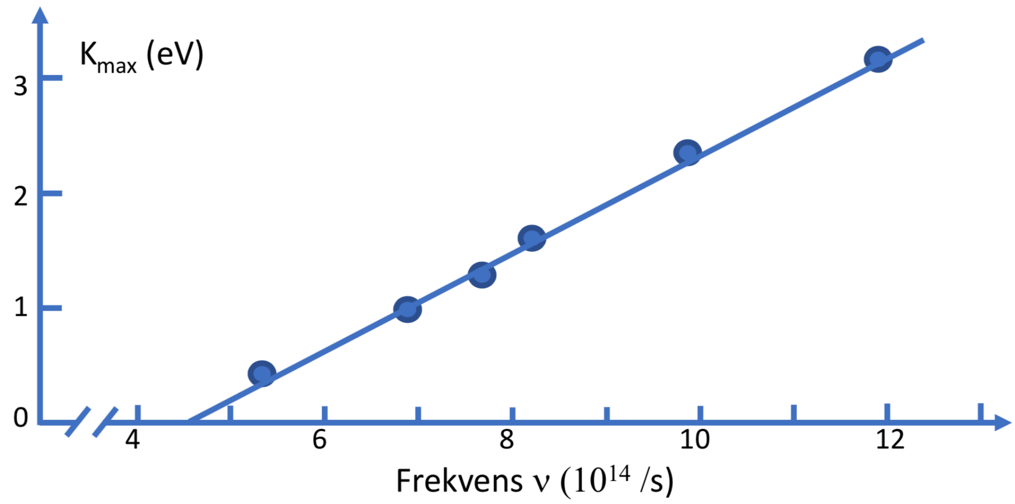
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: Tirsdag 29. mai 2018, kl 09:00-13:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 3 sider
Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1: Fotoelektrisk effekt

Millikan utførte følgende eksperiment: En metallplate ble bestrålt med monokromatisk lys. De utsendte fotoelektronene ble registrert av en detektor. Det ble videre lagt en elektrisk spenning mellom metallplaten og detektoren, og den laveste spenningen som hindret fotoelektronene i å nå detektoren, ble målt som funksjon av lysets frekvens. Resultatet av eksperimentet er gjengitt i Fig. 1.



Figur 1: Data fra Millikans eksperiment (R.A. Millikan, Phys. Rev. 7, 355 (1916)).

a) Hva menes med metallets arbeidsfunksjon w_0?

b) Bestem metallets arbeidsfunksjon utfra opplysningene i Fig. 1. Du kan få bruk for Plancks konstant $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eVs.

c) Da Millikan utførte sitt eksperiment, var ikke Plancks konstant kjent. Gi et grovt overslag av Plancks konstant h utfra opplysningene i Fig. 1.

d) Hvilken grunnleggende egenskap ved naturen avslørte eksperimentet?

Oppgave 2: Generelt om kvantemekanikk

Det lønner seg *ikke* å innføre sfæriske koordinater i denne oppgaven.

a) Hvordan tolkes $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ i kvantemekanikken og hvilket krav stilles til denne?

b) Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likningen for en partikkel med potensiell energi $V(\vec{r})$.

c) Vis at en løsning kan skrives på formen

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \tag{1}$$

og finn den likningen som den stasjonære bølgefunksjonen $\psi(\vec{r})$ tilfredsstiller.

Anta at partikkelen ved tiden $t = 0$ er i en superposisjon av to ortonormerte stasjonære tilstander med energi-egenverdier $E_1 = \epsilon$ og $E_2 = 2\epsilon$:

$$\Psi(\vec{r},0) = \frac{i4}{5}\psi_1(\vec{r}) - \frac{3}{5}\psi_2(\vec{r}). \tag{2}$$

d) Skriv ned den tilhørende tidsavhengige bølgefunksjonen og vis at den er normert.

e) Hvis du måler én gang på systemet ved tiden t, hvilken energi vil du da måle?

f) Definer forventningsverdien av energien og finn denne ved tiden t.

Oppgave 3: Hydrogenatomet

I første del av denne oppgaven vil vi se bort i fra elektronets egenspinn. Energiegenverdilikningen for et elektron i hydrogenatomet med Coulomb-potensial $-k_e e^2/r$ er da gitt ved

$$\hat{H}_0\psi_{nlm} = -\frac{E_0}{n^2}\psi_{nlm}, \tag{3}$$

der konstanten E_0 er gitt ved $E_0 = 13.6$ eV.

a) Sett opp Hamilton-operatoren $\hat{H}_0$ og skriv ned hvilke verdier kvantetallene n, l og m kan anta. Hvilken fysisk betydning har l og m?

b) Fortell kort hvorfor det første eksiterte energinivået er degenerert. Hvilke kvantetall har de degenererte tilstandene i dette nivået?

c) Beregn bølgelengden for fotonet som sendes ut når hydrogenatomet går fra $n = 2$-tilstanden til $n = 1$-tilstanden (grunntilstanden).

Hydrogenatomets bølgefunksjon i grunntilstanden er gitt ved

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \tag{4}$$

der A og a er positive reelle konstanter. Til hjelp oppgir vi at Laplace-operatoren i sfæriske koordinater er

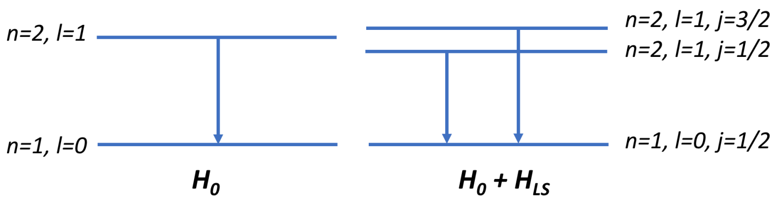
$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\hat{\mathbf{L}}^2. \tag{5}$$

d) Vis ved innsetting i egenverdilikningen at ψ_{100} kan være egentilstand for $\hat{H}_0$ og bestem konstanten E_0 uttrykt ved naturkonstanter.

Vi skal nå ta hensyn til elektronets egenspinn. På grunn av spinn-banekopling får vi et tilleggsledd i Hamilton-operatoren lik

$$\hat{H}_{LS} = C\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \tag{6}$$

der $\hat{\mathbf{S}}$ er operatoren for elektronets egenspinn og C er en konstant. Spinn-banekoplingen vil splitte $n = 2, l = 1$-nivået i to nye nivåer som illustrert i Fig. 2. Hint: Det kan lønne seg å uttrykke egenverdiene til $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ ved hjelp av kvantetallene j, l og s og benytte at $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$.



Figur 2: Oppsplitting av $n = 2, l = 1$-nivået i hydrogen (effekten er overdrevet).

e) Finn energiene $E_{j=1/2}$ og $E_{j=3/2}$ til de to nye nivåene uttrykt ved E_0 og C.

f) Det er påvist at spektrallinjene fra de to nivåene har en separasjon i bølgelengde på $\Delta\lambda = 5.3 \cdot 10^{-4}$ nm. Finn konstanten C. Hint: Du kan få bruk for en tilnærming av typen $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$ for $x \ll 1$.