

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk

Dato: Mandag 3. juni 2019, kl 14:30-18:30 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 3 sider

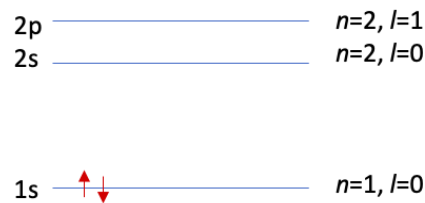
Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1: Stern-Gerlach-eksperimentet og atomet

Stern-Gerlach-eksperimentet fra 1922 var ment å teste Bohrs atommodell om at angulærmomentet L er kvantisert. Det ble benyttet sølv-atomer hvor det siste bundne elektronet var i en $l = 0$ tilstand (kalles også s -orbital).

- Lag en skisse av eksperimentet og forklar hvorfor magnetfeltet som ble brukt, måtte være inhomogent.
- Eksperimentet mislyktes i å fortelle noe om at L var kvantisert. Hvilken grunnleggende egenskap ved elektronet ble i stedet avslørt ved eksperimentet?
- Forklar hva som menes med fermioner og bosoner, og gi et par eksempler på hver av dem.
- Beskriv elektronkonfigurasjonen for oksygen med $Z = 8$ ved å lage en tegning som Fig. 1, men med ekstra elektroner fylt inn. Hva er hovedregelen for rekkefølgen av enkeltpartikkelnivåer og hvilke regler/prinsipper brukes for å fylle opp nivåene?



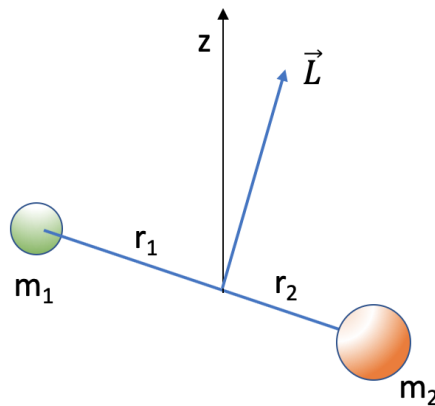
Figur 1: Enkeltpartikkel-nivåskjema for atomer. Vi har her fylt opp elektroner for grunntilstanden i helium med $Z = 2$. Pilene symboliserer spinn opp og ned for elektronene i de forskjellige nivåene. De spektroskopiske symbolene s og p tilsvarer $l = 0$ og $l = 1$.

- For to-elektron-systemer (slik som helium) snakker man om singlett- og triplettilstander for spinnene. Beskriv hvordan elektronspinnene er arrangert i disse tilstandene.

- f) Den første eksiterte tilstanden i helium består av ett elektron i det laveste nivået med $n = 1$ og $l = 0$ ($1s$ -orbitalen) og det andre elektronet i nivået $n = 2$ og $l = 0$ ($2s$ -orbitalen), jammfør nivåene i Fig. 1. Hvordan arrangerer elektronspinnene seg i første eksiterte tilstand? Forklar med egne ord hvorfor dette er energetisk fordelaktig.

Oppgave 2: Diatomisk molekyl

Figur 2 viser en skisse av et molekyl bestående av to atomer bundet sammen. Treghetsmomentet om massesenteret (CM) kan skrives som $I_{CM} = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2$. I denne oppgaven skal vi ikke ta hensyn til vibrasjonstilstander for det diatomiske molekylet.



Figur 2: Rotasjon av et diatomisk molekyl.

- Vis at treghetsmomentet også kan uttrykkes som $I_{CM} = \mu R^2$, hvor μ er den reduserte masse og R er avstanden mellom atomene.
- Vi ser bare på rotasjonsenergi i denne oppgaven, som klassisk er gitt ved $\frac{L^2}{2\mu R^2}$. Sett opp den tidsuavhengige energieigenverdikningen for systemet og dets energieigenverdier.
- Vis at avstanden mellom to rotasjonsnivåer er $\Delta E(l \rightarrow l - 1) = \frac{\hbar^2}{\mu R^2} l$.

Vi skal nå studere CO-molekylet. Oksygen og karbon har masser tilnærmet gitt ved hhv. $16u$ og $12u$, hvor den atomære masseenheten er gitt ved $1u = 1.6605 \times 10^{-27} \text{kg}$. Frekvensavstanden mellom to nabo-spektrallinjer er målt til å være $\Delta\nu_l = 1.151 \times 10^{11} \text{Hz}$. Planck's konstant er $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Js}$.

- Finne molekylets treghetsmoment i enheter av kg m^2 og avstanden R i enheter av nm .

Oppgave 3: Hydrogenatomet

Elektronet i hydrogenatomet kan beskrives ved tilstandsfunksjonene $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ som oppfyller

$$\hat{H}_0\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = E_n\psi_{nlm_l}(\vec{r}), \quad (1)$$

$$\hat{L}^2\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = \hbar^2l(l+1)\psi_{nlm_l}(\vec{r}), \quad (2)$$

$$\hat{L}_z\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = \hbar m_l\psi_{nlm_l}(\vec{r}), \quad (3)$$

hvor $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ og $E_0 = 13.6$ eV. Det lønner seg *ikke* i denne oppgaven å beskrive bølgefunksjoner eller operatører eksplisitt for eksempel vha. polar (r, θ, ϕ) eller kartesiske (x, y, z) koordinater. Vi ser bort fra elektronets egenspinn i hele denne oppgaven.

- Hva er fellesbetegnelsen på likningene over og hvilke fysiske størrelser representerer \hat{H}_0 , \hat{L}^2 og \hat{L}_z ?
- Hvilke verdier kan kvantetallene n , l og m_l anta?
- Fortell kort hvorfor det første eksiterte energinivået er degenerert. Hvilke kvantetall har de degenererte tilstandene i dette nivået?
- Hva menes med at funksjonene $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ er ortonormerte?

Ved et bestemt tidspunkt antar vi at hydrogenatomets bølgefunksjon ψ er en superposisjon av tre funksjoner

$$\psi = \frac{1}{3}(2\psi_{310} + 1i\psi_{211} + 2\psi_{21-1}). \quad (4)$$

- Vis at ψ er normert.
- Finn forventningsverdien av den fysiske størrelsen L_z og det tilhørende standardavvik (σ_{L_z}). Er minimum- og maksimumverdiene for L_z forenlig med lengden av \vec{L} ?

Hamiltonoperatoren \hat{H}_0 blir nå modifisert med et svakt tilleggsledd $\alpha\hat{L}^2$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha\hat{L}^2, \quad (5)$$

der α er en positiv, reell konstant som representerer leddets styrke. Vi antar at bølgefunksjonen ved tiden $t = 0$ er gitt ved $\Psi(\vec{r}, 0) = \psi$ fra Likn. (4).

- Finn forventningsverdien $\langle E \rangle$ til energien til systemet ved tiden $t = 0$.
- Skriv opp bølgefunksjonen $\Psi(\vec{r}, t)$ ved tiden t . Hvis du foretar en måling ved tiden t , hvilken energi måler du da?