UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende hjemmeeksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Utlevering av oppgaven: Torsdag 28. mai 2020, kl 9:00
Innlevering av oppgaven: Fredag 5. juni 2020, kl 9:00
Oppgavesettet inneholder: 6 oppgaver

(Versjon 11. mai 2020)

Viktig informasjon

- Elektronisk innlevering via **Inspera** med frist Fredag 5. juni 2020, kl 9:00. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, vanlig foto med mobiltelefon fungerer ofte dårlig. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i utregningene.
- Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skjer anonymt via Inspera hvor kandidatnummeret automatisk blir skrevet på oppgaven.
- Avsluttende hjemmeeksamen teller 80% av karakteren i FYS2140.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Vis forståelse gjennom forklaringer og begrunnelser for utregninger og svar. Dette blir vektlagt i vurderingen av eksamen.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder gjerne relevante plott og programkode i pdf-filen.
- Inspera tar bare ett dokument. Det er derfor viktig at alt materiale lastes opp i **én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en. Du kan laste opp besvarelsen flere ganger i Inspera, det tas bare hensyn til den siste innleveringen.
- Lykke til!

Oppgave 1: Kvantemekanikk

Denne oppgaven behandler noen fundamentale egenskaper ved kvantemekanikken. Vi skal studere en partikkel med masse m i et én-dimensjonalt potensial $V(x)$.

a) Sett opp den tidsavhengige Schrödingerlikningen (TASL) for systemet som bestemmer bølgefunksjon $\Psi(x,t)$. Forklar hva de ulike symbolene og leddene i likningen representerer.

b) Dersom vi har en stasjonær tilstand, vis at $\Psi(x,t)$ kan skrives på formen $\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t)$. Forklar/begrunn stegene i utregningen.

c) Finn funksjonen $\phi(t)$ og den tilhørende tidsuavhengige Schrödingerlikningen (TUSL). Hvilke krav stiller vi til bølgefunksjonen $\psi(x)$?

Vi ser nå på et kvantesystem med tre egenverditilstander ψ_1, ψ_2 og ψ_3 som antas å være ortonormerte. De tilhørende energi-egenverdier er $E_1 = E$, $E_2 = 2E$ og $E_3 = 3E$. Systemet er preparert ved tiden $t = 0$ som

$$\Psi(x,0) = A\left[-\psi_1(x) + 8\psi_2(x) + 2i\psi_3(x)\right]. \tag{1}$$

d) Finn normeringskonstanten A og sett opp systemets bølgefunksjon $\Psi(x,t)$.

e) Beregn forventningsverdien av energien $\langle H \rangle$ i tilstanden $\Psi(x,t)$.

f) Beregn standardavviket av energien σ_H i tilstanden $\Psi(x,t)$.

g) Hva kan du si om resultatet (verdi og sannsynlighet) av én energimåling på systemet?

Oppgave 2: Spredningstilstander

Vi vil i denne oppgaven studere potensialspredning av partikler.

a) Lag en skisse av et tenkt potensial $V(x)$ hvor en partikkel med totalenergi E er klassisk bundet, men i kvantefysikken representerer en spredningstilstand. Forklar med egne ord hva kvantefysisk tunnellering er.

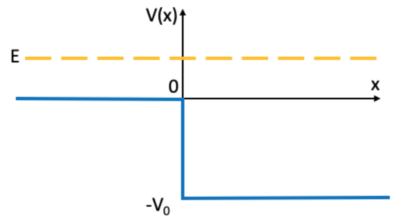
Vi tenker oss et annet potensial gitt ved

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \tag{2}$$

hvor $V_0 > 0$. Initielt kommer partiklene med masse m og energi E inn fra venstre i Fig. 1.

b) Når partiklene kommer inn fra venstre og passerer $x = 0$, hva skjer kvalitativt med størrelsen til hastigheten, den kinetiske energien og de Broglie-bølgelengden?

Vi vil nå beskrive spredningsproblemet i Fig. 1 kvantitativt. Slik som vi er vant til i kurset, skal du bruke planbølger med skarpe bølgetallsverdier, og ikke bygge opp fulle bølgepakker med kontinuerlige bølgetallsverdier.



Figur 1: Spredningspotensial $V(x)$ for partikler med energi E.

c) Sett opp Schrödingerlikningen og de generelle planbølgefunksjonene for området I ($x < 0$) og området II ($x \geq 0$). Bruk følgende planbølgeamplituder: Innkommende bølge A, reflektert bølge B og transmittert bølge C.

d) Finn forholdene mellom amplitudene $|B/A|^2$ og $|C/A|^2$ uttrykt ved hjelp av bølgetallene k i områdene I og II. Amplitudene A, B og C er definert i oppgave c).

e) Finn transmisjonskoeffisienten T og refleksjonskoeffisienten R *hver for seg* ved hjelp av bølgefunksjonenes amplituder og partiklenes hastigheter. Blir $T + R = 1$ i dette tilfellet og hvorfor/hvorfor ikke?

Oppgave 3: Uskarphetsrelasjonen

Den generelle uskarphetsrelasjonen er gitt ved

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2, \tag{3}$$

hvor kommutatoren av operatorene $\hat{A}$ og $\hat{B}$ er gitt ved $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

a) Vis at kommutatoren til posisjons- og bevegelesmengde-operatorene er gitt ved $[x, \hat{p}] = i\hbar$ og at Heisenbergs uskarphetsrelasjon $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ da kan utledes fra Likn. (3).

Vi vil nå studere Heisenbergs uskarphetsrelasjon for en partikkel i et én-dimensjonalt potensial. Grunntilstanden er gitt ved bølgefunksjonen

$$\psi_0(x) = A e^{-\frac{1}{2} a^2 x^2}, \tag{4}$$

hvor normeringskonstanten er gitt ved $A = \sqrt[4]{\frac{a^2}{\pi}}$.

b) Sett opp energi-egenverdilikningen for partikkelen og bestem den potensielle energien $V(x)$ som gir $\psi_0(x)$ som løsning av grunntilstanden. Finn grunntilstandsenergien E_0.

c) Argumenter kort for at $\langle x \rangle = 0$ og $\langle p \rangle = 0$ og vis at $\langle x^2 \rangle = 1/2a^2$ for grunntilstanden $\psi_0(x)$.

d) Vi oppgir her at $\langle p^2 \rangle = \hbar^2 a^2/2$. Finn produktet av standardavvikene $(\sigma_x \sigma_p)$ for x og p. Kommentér resultatet.

Oppgave 4: Degenerasjon i hydrogenatomet

Vi skal studere degenerasjonen i hydrogenatomet og ser bort fra elektronets egenspinn. Degenerasjonen d til et energinivå er gitt som antall tilstander som gir samme energi. Den tidsuavhengige Schrödingerlikningen uten eksterne krefter, kan skrives som

$$\hat{H}_0\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = E_n\psi_{nlm_l}(\vec{r}), \tag{5}$$

hvor $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ er tilstandsfunksjonene og $E_n = -E_0/n^2$ med $E_0 = 13.6$ eV er energi-egenverdiene.

a) Hvilke fysiske størrelser representerer $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$?

b) Hvilke verdier kan kvantetallene n, l og m_l anta? Forklar kort hvor de tillatte verdiene kommer fra (uten utledning og bevis).

c) Vis at degenerasjonen for energinivå E_n er $d = n^2$.

Vi lar nå hydrogenatomet befinne seg i et homogent og konstant magnetfelt gitt ved $B_z = 2m_eE_0/8e\hbar$ og velger z-aksen langs magnetfeltet.

d) Vis at Hamiltonoperatoren er gitt ved

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 + \frac{E_0}{8\hbar}\hat{\mathbf{L}}_z. \tag{6}$$

e) Vis at ψ_{n,l,m_l} representerer en tilstand med skarp energi også når magnetfeltet er tilstede og finn energi-egenverdien.

f) Vi antar nå en annen Hamiltonoperator

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_0 + \frac{E_0}{16\hbar^2}\left(\hat{\mathbf{L}}_x^2 + \hat{\mathbf{L}}_y^2\right). \tag{7}$$

Vis at ψ_{n,l,m_l} representerer en tilstand med skarp energi for $\hat{H}_2$ og finn den tilhørende energi-egenverdien.

g) Tegn energinivåene for alle bundne $n = 2$ tilstander for hver av de to Hamiltonoperatorene $\hat{H}_1$ og $\hat{H}_2$.

h) Hvilken degenerasjon d har energinivået $n = 3$, $l = 2$ og $m_l = -2$ for hver av de to Hamiltonoperatorene $\hat{H}_1$ og $\hat{H}_2$?

Oppgave 5: Sannsynlighetsfordelinger i hydrogenatomet

Schrödingerlikningen for hydrogenatomet er gitt ved

$$\hat{H}_0\psi_{nlm_l}(\vec{r}) = E_n\psi_{nlm_l}(\vec{r}), \tag{8}$$

hvor $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$ er tilstandsfunksjonene og $E_n = -E_0/n^2$ med $E_0 = 13.6$ eV er energi-egenverdiene. Vi ser bort fra egenspinn i denne oppgaven og skal i det påfølgende studere tilstanden $\psi_{200}(\vec{r})$ hvor vi bruker polarkoordinater $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$.

a) Hva er energi-egenverdien for $\psi_{200}(\vec{r})$ tilstanden i eV, og hvilke andre bølgefunksjoner har samme energi.

b) Forklar kort hvorfor bølgefunksjonen $\psi_{200}(\vec{r})$ er uavhengig av θ og ϕ.

Vi skriver opp den normerte bølgefunksjonen ψ_{200} ved hjelp av den dimensjonsløse variabelen $\rho = r/a_0$ hvor a_0 er Bohrradien.

$$\psi_{200}(\rho) = \sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right). \tag{9}$$

c) Finn forventningsverdien av radien i egentilstanden ψ_{200}. Hint: du får bruk for formelen $\int_0^\infty \rho^k e^{-\rho} d\rho = k!$ hvor k er et heltall.

d) Når vi skal se på ved hvilken radius elektronet med størst sannsynlighet befinner seg i, tar vi utgangspunkt i $P(r) = r^2 e^{-r/a_0}(2 - r/a_0)^2$. Finn den radius som elektronet med størst sannsynlighet befinner seg i.

e) Lag et plott av sannsynlighetstettheten som funksjon av radien og forklar utfra dette hvorfor de to radiene blir forskjellige. Bruk enhet a_0 for radiusen r i plottet.

Oppgave 6: Atomkonfigurasjoner og egenspinn

Den totale bølgefunksjon for en partikkel inneholder ikke bare den romlige del $\psi_{nlm_l}(\vec{r})$, men også en spinn-bølgefunksjon (også kalt spinor) χ_{s,m_s}.

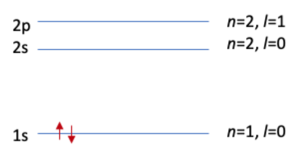
a) Hva kalles elementærpartikler med halvtallig og heltallig spinn? Hva er spesielt for mangepartikkelsystemer hvor partiklene har halvtallig spinn?

b) Hvilken verdi har spinn-kvantetallet s for elektronet og hvilke egenverdier har operatorene $\hat{\mathbf{S}}^2$ og $\hat{\mathbf{S}}_z$?

c) Anta at vi har vektorsummen $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ med $l = 2$. Hvilke projeksjoner av $\mathbf{J}$ på z-aksen kan vi ha? Tegn et typisk eksempel på hvordan vektorene adderer seg opp.

d) Hvor mange elektroner kan plasseres i en spesifikk l-tilstand?

e) Forklar hvordan elektronkonfigurasjonen ser ut for grunntilstanden til nitrogenatomet. Du kan ta utgangspunkt i Fig. 2 og fylle inn flere elektroner. Begrunn svaret ved hjelp av aktuelle regler for elektronfordeling i atomer.



Figur 2: Enkeltpartikkel-nivåskjema for helium med to elektroner med egenspinn opp og ned. De spektroskopiske symbolene s og p tilsvarer $l = 0$ og $l = 1$.