UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: 2. juni 2021, kl. 09:00-13:00

Definisjoner:
m = elektronets masse
c = lyshastigheten
$\hbar = h/2\pi$, der h er Plancks konstant
$a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ er Bohr-radius, der e er elektronladning og ϵ_0 er permittiviteten

Oppgave 1: Begreper

I denne oppgaven skal du forklare sentrale begreper i kvantefysikken.

1a) Forklar med noen få setninger hva egenfunksjoner er.

1b) Forklar med noen få setninger hva stasjonære tilstander er.

Oppgave 2: Elektroner i en delta-funksjonsbrønn

I denne oppgaven skal du studere elektroner i delta-funksjonspotensialen $V(x) = -\alpha\delta(x)$, der $\alpha = 2$ eVnm. Dirac-delta-funksjonen er som vanlig

$$\delta(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{når } x \neq 0 \\ \infty & \text{når } x = 0 \end{Bmatrix} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Den tidsuavhengige Schrödingerligningen (TUSL)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$$

har løsningen $\psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$ med $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ for grunntilstanden.

HINT for oppgaven:

Symmetri: $\psi(-x) = \psi(x)$.

Bruk $\int \psi^* \hat{K}\psi\, dx = \frac{1}{2m}\int (\hat{p}\psi)^* (\hat{p}\psi)\, dx$.

Bruk integrasjonsreglene for Dirac-delta-funksjonen.

$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx = n!/\lambda^{n+1}$ for $\lambda > 0$ og $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2a) Forklar hva det betyr at bølgefunksjonen $\psi(x)$ er normalisert.

2b) Betrakt et elektron i grunntilstanden. Beregn forventningsverdien $\langle V \rangle$ for den potensielle energien, samt forventningsverdien $\langle K \rangle$ for den kinetiske energien. Oppgi svarene i eV.

2c) Finn standardavvik σ_x og σ_p for posisjon og bevegelsesmengde.
Er disse konsistente med Heisenbergs uskarphetsrelasjon?

2d) Anta nå at to elektroner er i en og samme delta-funksjonsbrønn.
Skriv ned TUSL for to-elektron-systemet, og bølgefunksjonen for grunntilstanden. Forklar hvorfor bølgefunksjonen har det utseendet som den har.

HINT:
Du har lov til å anta at den elektrostatiske elektron-elektron-repulsjonen ikke påvirker bølgefunksjonens utseende.

Oppgave 3: Hydrogenatomet

Schrödingerligningen som vi bruker i kurset er en approksimasjon. Derfor må vi legge til ekstra ledd i Hamiltonoperatoren når vi beskriver f.eks. kobling til ytre magnetfelt (Stern-Gerlach-eksperimentet) og spinn-bane-interaksjon (LS-kobling). I denne oppgaven skal du legge til relativistisk korreksjon til den kinetiske energien, samt å beregne hvor mye den påvirker energien til hydrogenatomets grunntilstand.

3a) Den relativistiske energien er $K + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Vi har i kurset vist at man får den ikke-relativistiske energien ved hjelp av å rekkeutvikle dette uttryk for $x = p^2c^2/m^2c^4 \ll 1$.

Bruk rekkeutvikling, og vis at $K \approx K_0 + K'$, der $K_0 = p^2/2m$ er ikke-relativistiske kinetisk energi, og $K' = -p^4/8m^3c^2$ er første grad av korreksjon.

HINT:
Rekkeutvikling: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} -$ ... for små x.

3b) Vi definerer operatoren $\hat{K}' = -\hat{p}^4/8m^3c^2$.
Ved å bruke den radiale ligningen for hydrogenatomet (ligning. 4.53 in Griffiths), så er $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dr}$, og bølgefunksjonen er $u = u_{nl} = rR_{nl}(r)$.

Vis at for grunntilstanden til hydrogenatomet, så er

$$\langle K' \rangle = \frac{-1}{8m^3c^2} \int (\hat{p}^2\, u_{10})^* \, (\hat{p}^2\, u_{10})\, dr = -\frac{5\, E_1^2}{2mc^2}$$

der $E_1 = -\hbar^2/2ma^2 = -13.6$ eV.

HINT:
Bruk integrasjonsformel i oppgave 2.
Grunntilstanden: $R_{10}(r) = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$, der a er Bohr-radius.

3c) Beregn $\langle K' \rangle$ for grunntilstanden til hydrogenatomet, og oppgi svaret i eV.

3d) Anta at energien til elektronets $1s$-orbital i et tyngre atom kan beregnes på samme måte som for hydrogenatomet, kun gjennom å øke kjernens ladning fra $1e$ til Ze, der Z er atomnummeret. Elektronets ladning er fortsatt $1e$.

Beregn E_1 og $\langle K' \rangle$ for $1s$-orbitalen for et gullatom, og oppgi svarene i keV. Hva kan du si om relativistisk korreksjon for forskjellige atomer?

HINT:

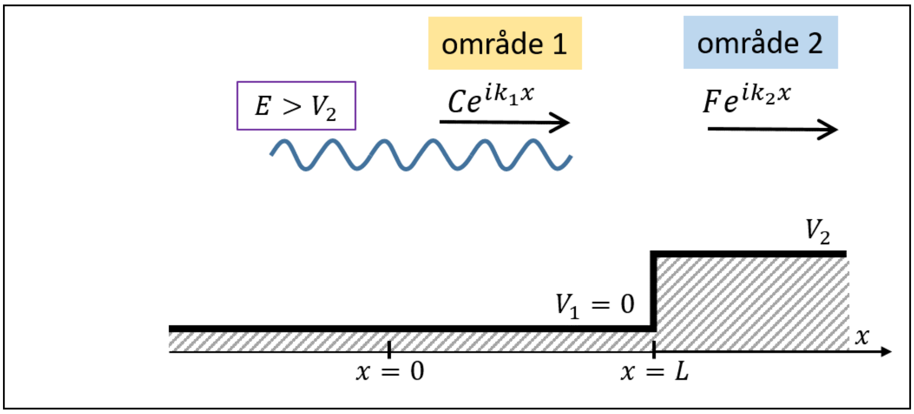
$Z = 79$ for gullatom.

For hydrogen: $E_1 = -\hbar^2/2ma^2 = -13.6$ eV, der $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$.

Oppgave 4: Spredningstilstand

I denne oppgaven skal du studere når et elektron blir spredt ved potensialsteg som vises i Figur 1 og 2. Potensialene er konstante i hvert område, og i område 1 er $V(x) = V_1 = 0$. Slik som vi er vant til i kurset, skal du bruke planbølger med skarpe bølgetallsverdier, og ikke bygge opp fulle bølgepakker med kontinuerlige bølgetallsverdier. Elektronets bølge forplanter seg initialt fra venstre til høyre, og energien til bølgen er større enn potensialene i alle områdene.

Transmisjonskoeffisienten T for bølgefunksjonen bestemmes direkte ved hjelp av bølgefunksjonens amplituder. (Mao., du skal ikke studere fluks av elektroner.)

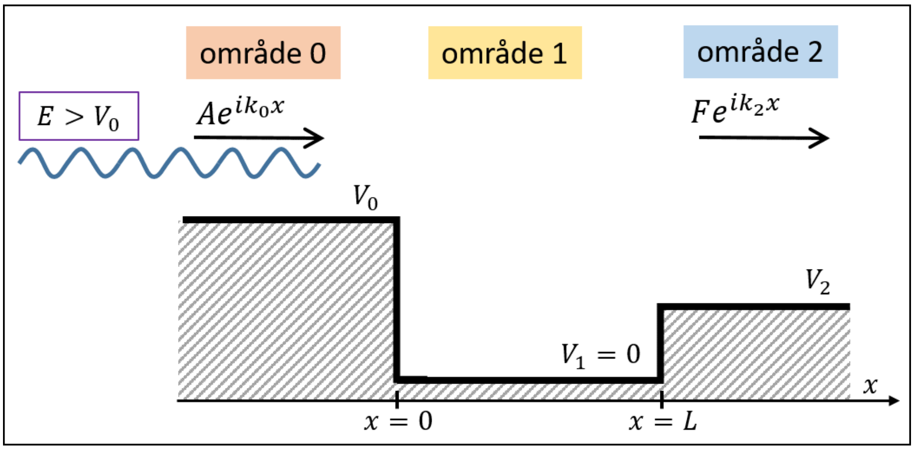


Figur 1: Spredningspotensial i oppgave 4b) og 4c): $V_1 = 0$ og $V_2 > V_1$.

4a) Forklar hva en spredningstilstand er, og hva som skiller den fra en bundet tilstand.

4b) Betrakt bølgefunksjonen og spredningspotensialet i Figur 1. Finn forholdet mellom amplitudene C og F, samt forholdet mellom amplitudene D og F, der D er amplituden på reflekterte bølge.

4c) Finn transmisjonskoeffisienten $T = |F|^2/|C|^2$ fra oppgave 4b).
Oppgi svaret i form av E og V_2.



Figur 2: Spredningspotensial i oppgave 4d): $V_1 = 0$ og $V_0 > V_2 > V_1$.

4d) Finn transmisjonskoeffisienten $T = |F|^2/|A|^2$ for bølgen i Figur 2.
Oppgi svaret i form av k_0, k_1, k_2, og L. Forenkle løsningen, slik at uttrykket bare inneholder bølgetallene og den trigonometriske funksjonen $\sin^2(k_1 L)$.

HINT:

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x.$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Når $k_0 = k_2$ får vi samme uttrykk som i Griffiths (spredning mot potensialbrønn) og for potensialbarriere i oblig 8.