Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: 9. juni 2022

Definisjoner (som eventuelt kan være nyttige):
m_e = elektronets masse
c = lyshastigheten
$\hbar = h/2\pi$, der h er Plancks konstant
$k = e^2/4\pi\varepsilon_0 = \hbar^2/m_e a_0$ er Coulombfaktoren
$a_0 = \hbar^2/m_e k \approx 0.053\,\mathrm{nm}$ er Bohrradius

Formler (som eventuelt kan være nyttige):
$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v|_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$

$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\,dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$ for $n = 0, 1, 2, ...$ og $Re(\beta) > 0$

$\frac{d}{dx}\sin(\beta x) = \beta\cos(\beta x)$
$\frac{d}{dx}\cos(\beta x) = -\beta\sin(\beta x)$

$\int \sin(\beta x)\,dx = -\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)$
$\int \cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$
$\int \sin^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x)$
$\int \cos^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x)$

$\int x\sin(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^2}\{\sin(\beta x) - \beta x\cos(\beta x)\}$
$\int x\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^2}\{\cos(\beta x) + \beta x\sin(\beta x)\}$
$\int x^2\sin(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^3}\{2x\beta\sin(\beta x) + (2 - \beta^2x^2)\cos(\beta x)\}$
$\int x^2\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta^3}\{2x\beta\cos(\beta x) - (2 - \beta^2x^2)\sin(\beta x)\}$
$\int x^2\sin^2(\beta x)\,dx = \frac{1}{24\beta^3}\{4\beta^3x^3 + (3 - 6\beta^2x^2)\sin(2\beta x) - 6\beta x\cos(2\beta x)\}$
$\int x^2\cos^2(\beta x)\,dx = \frac{1}{24\beta^3}\{4\beta^3x^3 - (3 - 6\beta^2x^2)\sin(2\beta x) + 6\beta x\cos(2\beta x)\}$

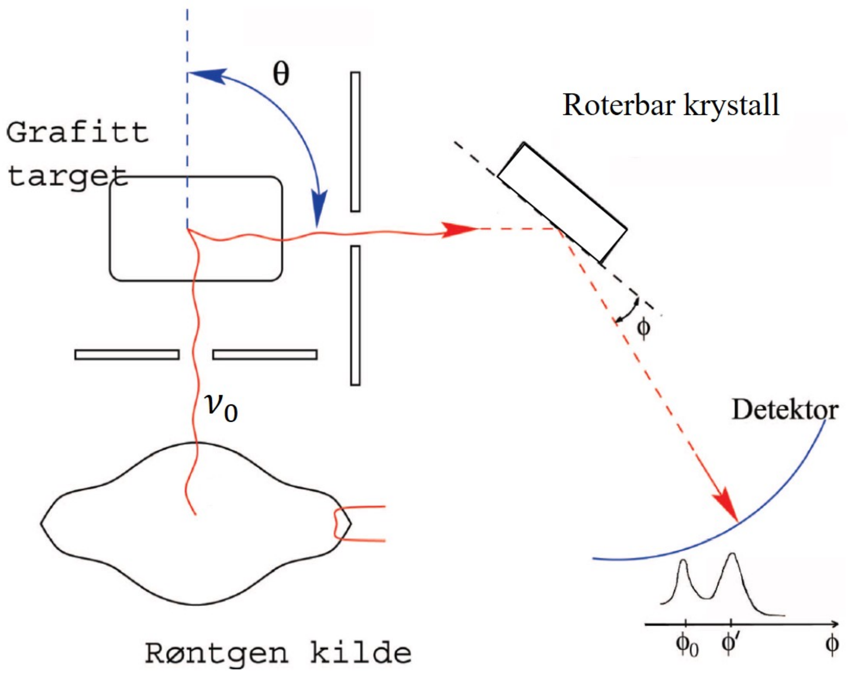
Oppgave 1 Heisenbergs uskarphetsrelasjon

a) Forklar hva Heisenbergs uskarphetsrelasjon betyr for måling på posisjon og bevegelsesmengde.

b) Relater diskusjonen i forrige deloppgave til bredden på en bølgepakke som inneholder planbølger med forskjellige frekvenser. Hvordan skal bølgepakken se ut for å få liten spredning i verdiene ved måling på bevegelsesmengde?

Oppgave 2 Compton-spredning

I denne oppgaven skal du forklare resultatene fra Compton-spredning; se Figur 1. Elektromagnetisk stråling med en gitt frekvens ν_0 treffer grafittplaten og blir spredt med spredningsvinkelen θ. Detektoren viser den spredte strålingens intensitet som funksjon av vinkelen ϕ på den roterbare krystallen.



Figur 1: Oppsett for Comptons forsøk.

a) Forklar hvordan eksperimentet viser at elektromagnetisk stråling kan tilordnes både partikkel- og bølgeegenskaper.

b) Forklar hvorfor detektoren oppviser to topper, der vinkelen ϕ_0 for ene toppen er nesten helt uavhengig av spredningsvinkelen θ, mens vinkelen ϕ' for andre toppen er tydelig avhengig av θ.

Oppgave 3 Superposisjon

I denne oppgaven skal du studere en superposisjon av egentilstandene for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn, slik den var definert i midtveiseksamen:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -a < x < a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Løsningene til den tidsuavhengige Schrödingerligningen er

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 1, 3, 5, ...\infty \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 2, 4, 6, ...\infty, \end{cases} \tag{2}$$

med energiene $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}n^2$. Bredden på bønnen er $a = 0.614\,\text{nm}$.

Anta nå at du har preparert et elektron i en tilstand med bølgefunksjonen $\psi(x) = A \cdot (a^2 - x^2)$ i potensialbrønnen.

a) Bestem A.

b) Du gjør en energimåling på $\psi(x)$. Beregn sannsynligheten for at du måler energien til grunntilstanden.

Oppgave 4 Hydrogenatomet

Energi-egentilstander for hydrogenatomet er $\psi_{nlm_l} = R_{nl}(r)Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$ med energi E_n. Radialdelen $R_{nl}(r)$ kan bestemmes av den modulerte radielle Schrödinger-ligningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k}{r} + \frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_{nl}(r) = E_n u_{nl}(r)\,, \tag{3}$$

der $u_{nl}(r) = r \cdot R_{nl}(r)$.

a) Grunntilstanden er på formen $R_{10}(r) = A \cdot e^{-\gamma r}$, der A er normeringskonstanten. Bestem γ og energien E_1 gjennom å sette inn tilsvarende funksjon $u_{10}(r)$ i ligning 3. (Du skal ikke beregne verdiene på γ og E_1.)
Hint: Bruk gjerne definisjoner på k og a_0 fra side 2.

b) Normering av $R_{10}(r)$ gir $A = 2/a_0^{3/2}$. Beregn forventningsverdi $\langle r \rangle$ og standardavvik σ_r for den radielle posisjonen. Oppgi verdiene i nm.

Oppgave 5 Angulærmoment

I denne oppgaven skal du studere angulærmomentet til et elektron i hydrogenatomet. Energi-egentilstandene ψ_{nlm_l} er også egenfunksjoner til egenverdi-ligningene:

$$\hat{L}^2\,\psi_{nlm_l} = \hbar^2 l(l+1)\,\psi_{nlm_l}$$
$$\hat{L}_z\,\psi_{nlm_l} = \hbar m_l\,\psi_{nlm_l}$$

a) Hvilke verdier kan l og m_l ha for et gitt hovedkvantetall n? Vis at kvadratet av egenverdien til $\hat{L}_z$ ikke er større enn egenverdien til $\hat{L}^2$.

b) Anta at du har et elektron i følgende degenererte tilstand i det andre energinivået, det vil si, $n = 2$:

$$\psi = A \sum_l \sum_{m_l} \psi_{2lm_l} \qquad \text{der } m_l \geq 0, \tag{4}$$

det vil si, med bidrag fra alle tilgjengelige l og alle tilgjengelige ikke-negative verdier på m_l. Bestem A.

c) Bestem forventningsverdiene for $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ til ψ i forrige deloppgave.

Oppgave 6 To-partikkel-system

Bølgefunksjonen for et enkelt elektron i tilstand a og med spinn-projeksjon m_s på z-aksen kan skrives som $\psi_a(\mathbf{r})\chi_{m_s}(s)$. Alternativt kan du skrive spinn-tilstanden som $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$. I denne oppgaven skal du beskrive en bølgefunksjon for to elektroner.

a) Skriv ned to-elektron-bølgefunksjonen der spinn-delen er triplett-tilstanden med $m_s(s_1) + m_s(s_2) = 0$. Det vil si, summen av de to elektronenes spinn-projeksjon på z-aksen skal være null.

b) Er rom-delen til bølgefunksjonen i a) symmetrisk eller antisymmetrisk? Begrunn svaret.

c) Vis at din to-elektron-bølgefunksjon er antisymmetrisk.