Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: 7. juni 2023

Konstanter (som eventuelt kan være nyttige):
$m = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$ er elektronets masse
$c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ er lyshastigheten
$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ er elektronets ladning
$\hbar = h/2\pi$, der $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js er Plancks konstant
$k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8.988 \times 10^9$ Jm/C^2 er Coulombs konstant
$a_0 = \hbar^2/mk_e e^2 \approx 0.053\,\mathrm{nm}$ er Bohr-radius

Formler (som eventuelt kan være nyttige):
$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v|_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$

$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\,dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$ for $n = 0, 1, 2, ...$ og $Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\,e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad Re(\beta) > 0$

$\int \sin(\beta x)\,dx = \frac{-1}{\beta}\cos(\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos(\beta x)\,dx = \frac{+1}{\beta}\sin(\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^3(\beta x)\,dx = \frac{1}{12\beta}(\cos(3\beta x) - 9\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int \cos^3(\beta x)\,dx = \frac{1}{12\beta}\sin(\beta x)(2\cos(2\beta x) + 10) \quad + konst.$

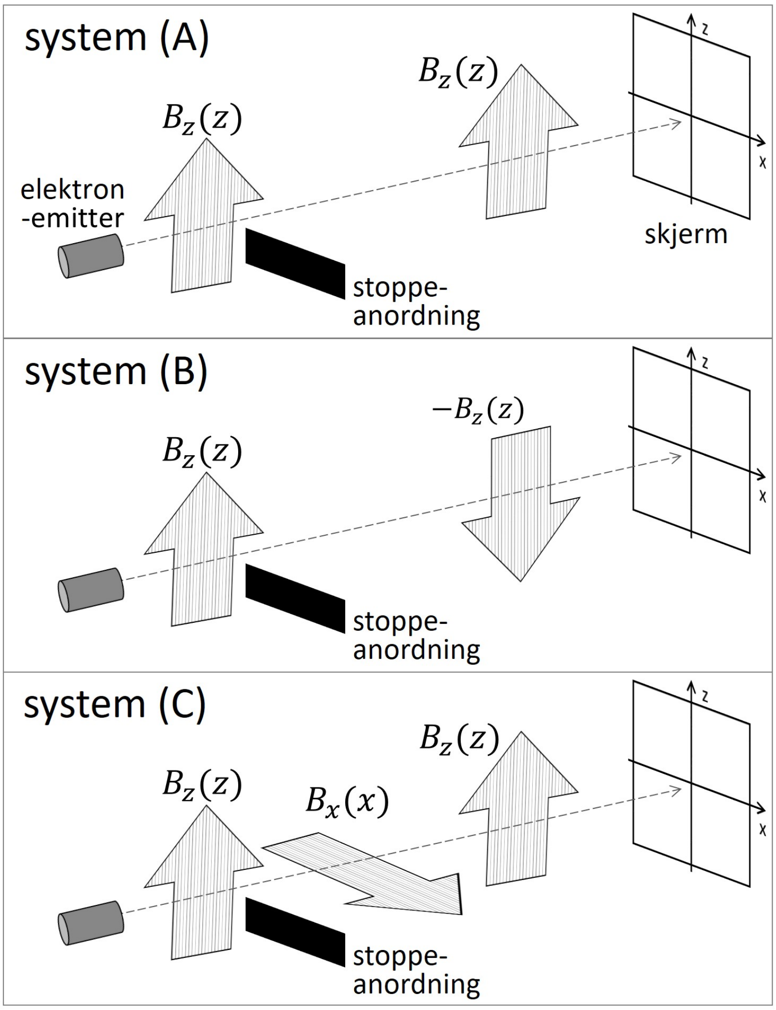
$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)) \quad + konst.$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \frac{-\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \frac{\alpha+2\beta^2}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$

Oppgave 1 Stern-Gerlach-eksperimentet

a) Hvilken kvantefysisk egenskap ble oppdaget gjennom Stern-Gerlach-eksperimentet? Beskriv kort eksperimentet og resultatet som påviste egenskapen.

b) Se figur 1. Elektroner sendes ut fra en elektronemitter gjennom et system av inhomogene magnetfelter. Hva er forventede resultater på skjermen hvis du sender inn 1000 elektroner gjennom system (A), 1000 elektroner gjennom system (B) og 1000 elektroner gjennom system (C), med magnetfelt som vist i figuren. Hvor mange elektroner vil nå skjermen, og hvor på skjermen vil de treffe den?



Figur 1: Tre systemer med to eller tre inhomogene magnetfelter B etter hverandre og med stoppe-anordning for de elektronene som bøyes nedover i z-retning. $B_z(z)$ er et magnetfelt i z-retning (vertikalt opp), $-B_z(z)$ er et magnetfelt i $-z$-retning (vertikalt ned) og $B_x(x)$ er et magnetfelt i x-retning (horisontalt mot høyre). Stiplet linje viser den rette veien fra emitteren til skjermen når det ikke er magnetfelter.

Oppgave 2 Fotoelektrisk effekt
I denne oppgaven skal du se på den fotoelektriske effekten, og tilhørende eksperimenter med måling av fotostrøm som funksjon av spenning.

a) Beskriv tre eksperimentelle resultater som ikke kan forklares ved hjelp av elektromagnetisk bølgeteori for lys.

b) Beskriv hypotesen for lys som Einstein presenterte i 1905, og beskriv hvordan han forklarte de tre eksperimentelle resultatene fra oppgave a).

Oppgave 3 Hydrogenatomet
Energi-egentilstander for hydrogenatomet er $\psi_{nlm_l} = R_{nl}(r)\, Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$ med energi E_n. Se bort ifra spinn i denne oppgaven.

a) Hvilke energi-egentilstander eksisterer i det tredje energinivået, dvs. hvilke par av kvantetall $\{l, m_l\}$ er mulige for $n = 3$?

b) Beregn frekvensen og bølgelengden til fotonet som sendes ut dersom et elektron i det tredje energinivået faller tilbake til grunntilstanden.

c) Beregn forventningsverdiene for den asimutale angulær-posisjonen, $\langle \phi \rangle$, og for den polare angulær-posisjonen, $\langle \theta \rangle$, til egentilstanden ψ_{310} der
$R_{31}(r) = \frac{8}{27\sqrt{6}} a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$ og $Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$.
HINT: Formler på side 1.

Oppgave 4 Superposisjon
I denne oppgaven skal du studere følgende superposisjon for elektronet i hydrogenatomet (se bort ifra spinn):

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{410} - \psi_{420}\right), \tag{1}$$

der ψ_{nlm_l} er de ortonormerte løsningene til
$\hat{H}\, \psi_{nlm_l} = E_n\, \psi_{nlm_l}$,
$\hat{L}^2\, \psi_{nlm_l} = \hbar^2 l(l+1)\, \psi_{nlm_l}$ og
$\hat{L}_z\, \psi_{nlm_l} = \hbar m_l\, \psi_{nlm_l}$.

a) Forklar forskjellen på en superposisjon og en egentilstand for operatoren $\hat{Q}$. Forklar også hva en degenerert tilstand er. Hvis du gjør en måling av den fysiske størrelsen Q på hver av disse tre typene tilstander, hva kan du si om resultatet av målingene?

b) Beregn standardavvikene σ_H, σ_{L^2} og σ_{L_z} til tilstanden ψ_A, dvs. standardavvikene i måleresultat for de fysiske størrelsene som representeres av operatorene $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$.

c) Beregn kommutatoren $[\hat{H}, \hat{L}^2]$ når den virker på tilstanden ψ_A.

Oppgave 5 Harmonisk oscillator
Denne oppgaven handler om energi-egentilstandene for harmonisk oscillator:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}, \quad \text{der } \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \tag{2}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{3}$$

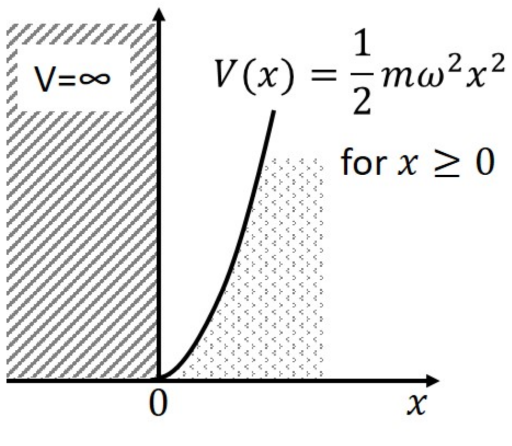
De seks første Hermite-polynomene er:
$H_0(\xi) = 1$,
$H_1(\xi) = 2\xi$,
$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$,
$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$,
$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$, og
$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$.

a) Bruk senke-operatoren $\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega x)$ og beregn $\hat{a}_-\psi_0(x)$.

b) Bestem konstanten K i differensialligningen

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi} + (K-1)\right) H_4(\xi) = 0. \tag{4}$$

c) Se nå på potensialet som er vist i figur 2. Beskriv energi-egentilstandene for dette potensialet, basert på tilstandene for harmonisk oscillator i ligning (2) og (3). Begrunn svaret.



Figur 2: Potensialet til oppgave 5c).

Oppgave 6 To-elektron-system

I denne oppgaven skal du se på to-elektron-systemet. De to elektronene er identiske (dvs. ikke mulig å skille mellom), men vi antar at de ikke vekselvirker via Coulomb-krefter.

a) Skriv ned to-elektron-tilstandene for de fire spinn-konfigurasjonene, der et enkelt elektron beskrives som $\psi_a(\mathbf{r})\chi_{m_s}(s)$. Er rom-delene symmetriske eller antisymmetriske med hensyn på koordinatbytte? Hvilke egenverdier har operatorene $\hat{S}^2$ og $\hat{S}_z$ for hver av disse fire spinn-konfigurasjonene?

b) Forklar hva utvekslingskraft ('exchange'-kraft) er, og hvordan den effekten innvirker på to-elektron-tilstandene.