UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

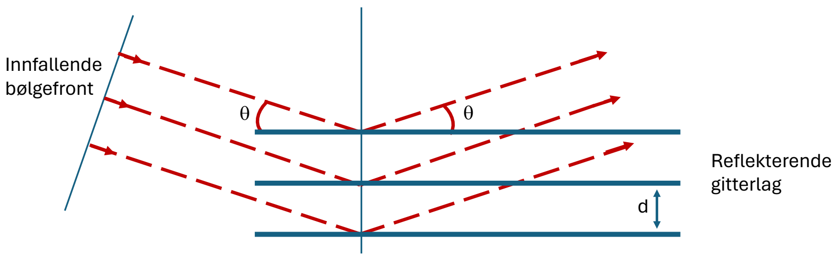
Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: Onsdag 5. juni 2024, kl 15:00-19:00 (4 timer)
Oppgavesettet er på: 4 sider
Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Materiens bølgeegenskaper

Fysikeren de Broglie foreslo i sin doktoravhandling i 1924 at partikler med masse også kunne ha bølgenatur. Hans hypotese var i analogi med Plancks antakelse om at lys kan ha partikkelnatur med energi $E = h\nu$ og bevegelsesmengde $p = h/\lambda$.

a) Skriv ned de Broglie bølgelengden for en partikkel. Hva må du passe på hvis du har relativistiske partikler?

I 1927 kunne Davisson og Germer observere elektroners bølgenatur ved å anvende Braggdiffraksjon som tidligere var brukt for röntgenstråler. Figur 1 viser en skisse av elektronenes spredning mot en krystall.



Figur 1: Prinsippskisse av Braggdiffraksjon fra en krystall med gitterplanavstand d. Spredningsvinkelen for innkommende og utgående stråler er θ.

b) Forklar bakgrunnen for Braggdiffraksjon og vis hvordan du finner Bragg-betingelsen $2d \sin\theta = n\lambda$ (lag gjerne en tegning).

Det er vanlig å bruke termiske nøytroner med lav fart ($v \ll c$) i materialstudier av krystaller. Nøytronene med masse $m_n = 939.6$ MeV/c^2 har i dette eksperimentet kinetisk energi $K_n = 0.025$ eV. I spredning mot en NaCl krystall med gitterplanavstand $d = 2.82 \cdot 10^{-10}$m observeres den første konstruktive interferens for vinkelen $\theta = 18.6$ °. Det kan være nyttig å bruke relasjonen $hc = 1240$ eV nm i denne oppgaven.

c) Finn den observerte bølgelengden ut fra Braggbetingelsen for $n = 1$ og sammenlikn med de Broglie bølgelengden.

d) Partiklers bølgenatur avspeiler seg i en uskarphetsrelasjon mellom x og p. Som et eksempel, ser vi her på en partikkel med bølgefunksjon

$$\psi(x) = \begin{cases} C(a^2 - x^2), & -a \leq x \leq +a \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

hvor C er normeringskonstanten. Følgende verdier er oppgitt:

$$C = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}, \ \langle x \rangle = 0, \ \langle p \rangle = 0 \text{ og } \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{7}. \tag{2}$$

Argumenter hvorfor $\langle x \rangle = 0$ og $\langle p \rangle = 0$. Regn ut forventningsverdien $\langle p^2 \rangle$, uskarphetene (stardardavvikene) σ_x og σ_p, og sammenlikn resultatet med Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Oppgave 2 Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra egenspinnet til elektronet. Videre lønner det seg *ikke* å innføre spesifikke rom-koordinater, som for eksempel sfæriske eller kartesiske.

Den tidsuavhengige Schödingerlikningen for hydrogen er gitt ved

$$\hat{H}_0 \psi_{nlm} = E_n \psi_{nlm}, \tag{3}$$

hvor tilstandene ψ_{nlm} er ortonormerte. Energi-egenverdiene er gitt ved
$E_n = -E_0/n^2$ der $E_0 = 13.6$ eV.

a) Hvilke verdier kan kvantetallene n, l og m anta? Hva representerer operatorene $\hat{\vec{L}}^2$ og $\hat{L}_z$ og hvilke egenverdier har disse i tilstanden ψ_{nlm}?

b) Et hydrogenatom befinner seg ved tiden $t = 0$ i en superponert tilstand

$$\Psi_0(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_{21-1} + \psi_{210} + \psi_{211} \right), \tag{4}$$

uttrykt ved de romlige egenfunksjonene ψ_{nlm}. Vis at $\Psi_0(\vec{r}, 0)$ er normert.

c) Skriv ned egenverdiene for $\hat{H}_0$ og $\hat{\vec{L}}^2$ i tilstanden $\Psi_0(\vec{r}, 0)$ og de tilhørende verdier for uskarphetene ΔH_0 og ΔL^2. Gi en kort begrunnelse for verdiene som du oppgir.

d) Hvor stor sannsynlighet er det for å måle verdien $-\hbar$ for $\hat{L}_z$ i tilstanden $\Psi_0(\vec{r}, 0)$?

e) Bestem forventningsverdien $\langle L_z \rangle$ og uskarpheten ΔL_z i tilstanden $\Psi_0(\vec{r}, 0)$.

Vi plasserer hydrogenatomet i et homogent magnetfelt langs z-aksen, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Hamiltonoperatoren inkluderer nå den normale Zeeman effekten og blir

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2m_e} B \hat{L}_z, \tag{5}$$

der e er elektronets ladning og m_e er massen til elektronet. Hydrogenatomet er preparert i den samme tilstanden som vi hadde uten B-felt (Likn. 4). Det vil si at den nye bølgefunksjonen starter som $\Psi(\vec{r}, 0) = \Psi_0(\vec{r}, 0)$ ved tiden $t = 0$.

f) Hvis du foretar en måling på systemet ved tiden $t = 0$, hvilke energier vil du kunne måle?

g) Vi skal nå la bølgefunksjonen utvikle seg med tiden t og definerer følgende størrelser: $\omega_0 \equiv -E_0/4\hbar$ og $\omega_z \equiv eB/2m_e$. Finn bølgefunksjonen $\Psi(\vec{r}, t)$ uttrykt ved disse størrelsene.

h) Hvilke(n) av forventningsverdiene $\langle E \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L^2 \rangle$, og $\langle \vec{r} \rangle$ er uavhengige av tiden i tilstanden $\Psi(\vec{r}, t)$? Begrunn svaret.

Oppgave 3 Fler-elektronsystemer

a) Den antisymmetriske spinn-egenfunksjonen for et to-elektronsystem kan skrives som

$$\chi^A(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2) \right]. \tag{6}$$

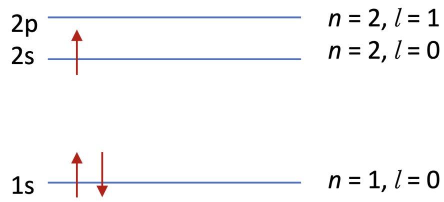
Forklar hva de fire funksjonene på høyre side av likhetstegnet representerer.

b) Skriv ned de tre andre mulige to-elektron spinn-egenfunksjonene.

c) Skriv ned kvantetallene for det totale egenspinnet og dets projeksjon inn på z-aksen for hver av de fire spinn-egenfunksjonene fra oppgave a) og b). Vis hvilken symmetri disse spinn-egenfunksjonene har med hensyn på elektronbytte.

d) I kurset har vi vist med en enkel modell[1] at to identiske fermioner er nærmere (fjernere) hverandre hvis den romlige bølgefunksjon er symmetrisk (antisymmetrisk). Hva kalles denne kraften og hva er dennes opphav?

e) Figur 2 viser grunntilstanden for litium hvor de tre elektronene er plassert i $1s$- og $2s$-orbitalene. Tegn av figuren og fyll inn elektroner for grunntilstanden i karbon som har seks elektroner. Hvilke symmetrier har spinn-egenfunksjonen $\chi(1,2)$ og rom-bølgefunksjonen $\Psi(\vec{r_1},\vec{r_2})$ i $2p$-orbitalen? Forklar kvalitativt og med få ord hvorfor dette gir laveste grunntilstandsenergi.



Figur 2: Enkeltpartikkel-nivåskjema for litium atomet. Vi har her fylt opp elektroner for grunntilstanden i litium med protontall $Z = 3$. Pilene symboliserer spinn opp og ned og de spektroskopiske symbolene s og p tilsvarer kvantetallene for de angulære momentene $l = 0$ og $l = 1$.

[1] Modellen beskriver forventningsverdien av kvadratet av avstanden mellom to elektroner langs x-aksen, $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$, basert på symmetriegenskapene for elektronenes totale romlige bølgefunksjon.