Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: augusti 2023

Konstanter (som eventuelt kan være nyttige):
$m = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$ er elektronets masse
$c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ er lyshastigheten
$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ er elektronets ladning
$\hbar = h/2\pi$, der $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js er Plancks konstant
$k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{Jm/C^2}$ er Coulombs konstant
$a_0 = \hbar^2/mk_e e^2 \approx 0.053\,\mathrm{nm}$ er Bohr-radius

Formler (som eventuelt kan være nyttige):
$\int_a^b u\, v'\, dx = u\, v|_a^b - \int_a^b u'\, v\, dx$

$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\, dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$ for $n = 0, 1, 2, ...$ og $Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\, e^{-\beta x^2}\, dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad Re(\beta) > 0$

$\int \sin(\beta x)\, dx = \frac{-1}{\beta}\cos(\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos(\beta x)\, dx = \frac{+1}{\beta}\sin(\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^2(\beta x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos^2(\beta x)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^3(\beta x)\, dx = \frac{1}{12\beta}(\cos(3\beta x) - 9\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int \cos^3(\beta x)\, dx = \frac{1}{12\beta}\sin(\beta x)(2\cos(2\beta x) + 10) \quad + konst.$

$\int \sin^4(\beta x)\, dx = \frac{1}{32\beta}(12\beta x - 8\sin(2\beta x) + \sin(4\beta x)) \quad + konst.$
$\int \cos^4(\beta x)\, dx = \frac{1}{32\beta}(12\beta x + 8\sin(2\beta x) + \sin(4\beta x)) \quad + konst.$

$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)) \quad + konst.$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x\, e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\, dx = \frac{-\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\, e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\, dx = \frac{\alpha+2\beta^2}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}, \quad \alpha > 0$

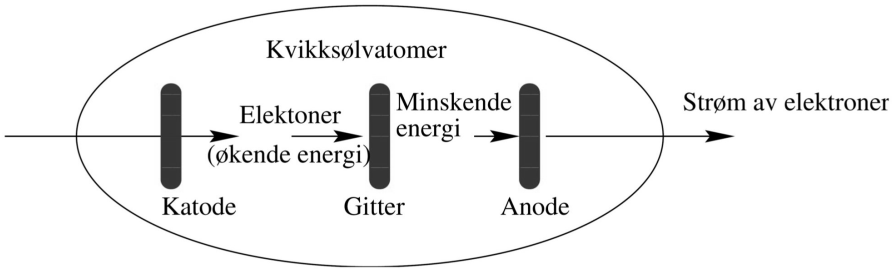
Oppgave 1 Spinn

a) En spinn-tilstand kan betegnes som $\chi_{m_s}(s)$. Hvilke kvantetall kan elektronets spinn-tilstand ha? Hva betyr det for spinnets egenskaper at $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] \neq 0$?

b) På hvilken måte man kan beskrive elektronets spinn som et angulærmoment. *HINT:* Teorien bak Stern–Gerlach-eksperimentet.

Oppgave 2 Franck-Hertz-eksperimentet

I denne oppgaven skal du se på Franck og Hertz sitt eksperiment med kvikksølv i 1914, med tilhørende målinger og resultater.



Figur 1: Skjematisk oppsett for Franck-Hertz-eksperimentet.

a) Beskriv eksperimentet og hensikten med dette.

b) Beskriv de to resultatene fra eksperimentet som bekreftet det som var hensikten.

Oppgave 3 Superposisjon

I denne oppgaven skal du studere en superposisjon Ψ av de ortonormerte energi-egentilstandene ψ_n:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{1}$$

a) Forklar hva som skjer med superposisjonen når du måler energien til den. Hvilken kvantefysisk informasjon får du fra koeffisientene c_n?

b) Vis at $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\, dx$.

c) Beregn koeffisienten c_4 for superposisjonen $\Psi(x,0) = A \cdot x \cdot \cos^3(Kx)$ for et elektron i en uendelig dyp brønn der $V(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a$ med $a = 2\pi$ Å. De to konstantene i bølgefunksjonen er $A = 48/\sqrt{299\pi + 1920\pi^3}$ Å$^{-3/2}$ og $K = 2$ Å^{-1}. *Hint*: Egenfunksjonene er $\sqrt{2/a}\,\sin(k_n x)$ for $0 \leq x \leq a$, og der $k_n = n\pi/a$.

d) Vis at kommutatoren $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ når den virker på tilstanden $\Psi(x,t)$.

Oppgave 4 Hydrogenatomet
Den radielle differensial-ligningen for hydrogenatomet er

$$\frac{d}{dr}\Big(r^2\,\frac{d}{dr}\,R_{nl}(r)\Big) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r} + E_n\Big)\,R_{nl}(r) - l(l+1)\,R_{nl}(r) = 0. \qquad (2)$$

a) Vis at substitusjonen $u_{nl}(r) \equiv rR_{nl}(r)$ gir den modifierte Schrödinger-ligningen

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\Big)\,u_{nl}(r) = E_n\,u_{nl}(r), \quad \text{der } V_{eff}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}.$$

b) Beregn forventningsverdiene $\langle K\rangle$ for den kinetiske energien og $\langle V\rangle$ for den potensielle energien til grunntilstanden $u_{10}(r) = 2a_0^{-3/2} r\, e^{-r/a_0}$, der a_0 er Bohr-radius. Oppgi verdiene i eV.

c) Hvor kommer kvantiseringen i energiene fra, eller med andre ord, hvilken del i teorien og matematikken til kvantefysikken tillater ikke et kontinuerlig energispektrum for hydrogenatomet? Hva ville skje med elektronene i alle atomer hvis energifordelingen var kontinuerlig?

Oppgave 5 Hydrogen-molekylet
Denne oppgaven handler om hydrogen-molekylet, H_2. Kjerne-delen til den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen er

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2M_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2M_2}\nabla_2^2 + V(R_0) + \frac{1}{2}M\omega^2\big(R-R_0\big)^2\Big)\,\Theta(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2) = E_{nl}\,\Theta(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2), \quad (3)$$

og systemets energi er beskrevet av

$$E_{nl} = V(R_0) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2MR_0^2} + \big(n+\frac{1}{2}\big)\hbar\omega. \qquad (4)$$

$R = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$ er avstanden mellom de to atomene, og $R_0 = 0.74\,\text{Å}$ er likevektsavstanden for H_2-molekylet. $M = M_1M_2/(M_1+M_2)$ er den reduserte massen, og hydrogen-atomet har massen $M_H = 1.67\times10^{-27}\,\text{kg} = 939\,\text{MeV/c}^2$. I tillegg er $V(R_0) = -4.52\,\text{eV}$ og $\omega = 7.90\times10^{14}\,\text{rad/s}$ for H_2.

a) Beskriv de tre bidragene til den totale energien for systemet. Forklar hvorfor teorien for harmonisk oscillator er viktig for systemet. Beskriv også den angulære delen av egenfunksjonene til Schrödinger-ligningen.

b) Beregn frekvensen og tilsvarende bølgelengde til et foton som kan eksitere molekylet opp fra grunntilstanden.

Oppgave 6 To-elektron-system

I denne oppgaven skal du se på to-elektron-systemet. De to elektronene er identiske (dvs. ikke mulig å skille mellom), men vi antar at de ikke vekselvirker via Coulomb-krefter. Et enkelt elektron beskrives som $\psi_a(\mathbf{r}, s) = \psi_\alpha(\mathbf{r})\chi_{m_s}(s)$.

a) Forklar hva Paulis eksklusjonsprinsipp betyr. Forklar også hvorfor prinsippet gjelder for fermioner, men ikke for bosoner.

b) Se nå på de to elektronene i heliumatomet, og anta at en-elektron-tilstandene kan beskrives som hydrogen-lignende. Skriv ned energi-egenfunksjonen for grunntilstanden til heliumatomet.