Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: augusti 2023

Konstanter (som eventuelt kan være nyttige):
$m = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$ er elektronets masse
$c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ er lyshastigheten
$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ er elektronets ladning
$\hbar = h/2\pi$, der $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js er Plancks konstant
$k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8.988 \times 10^9$ Jm/C^2 er Coulombs konstant
$a_0 = \hbar^2/mk_e e^2 \approx 0.053\,\mathrm{nm}$ er Bohr-radius

Formler (som eventuelt kan være nyttige):
$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v|_a^b - \int_a^b u'\,v\,dx$

$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\,dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}}$ for $n = 0, 1, 2, ...$ og $Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, $Re(\beta) > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\,e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$, $Re(\beta) > 0$

$\int \sin(\beta x)\,dx = \frac{-1}{\beta}\cos(\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos(\beta x)\,dx = \frac{+1}{\beta}\sin(\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$
$\int \cos^2(\beta x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta}\sin(2\beta x) \quad + konst.$

$\int \sin^3(\beta x)\,dx = \frac{1}{12\beta}(\cos(3\beta x) - 9\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int \cos^3(\beta x)\,dx = \frac{1}{12\beta}\sin(\beta x)(2\cos(2\beta x) + 10) \quad + konst.$

$\int \sin^4(\beta x)\,dx = \frac{1}{32\beta}(12\beta x - 8\sin(2\beta x) + \sin(4\beta x)) \quad + konst.$
$\int \cos^4(\beta x)\,dx = \frac{1}{32\beta}(12\beta x + 8\sin(2\beta x) + \sin(4\beta x)) \quad + konst.$

$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)) \quad + konst.$
$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)) \quad + konst.$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}$, $\alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \frac{-\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}$, $\alpha > 0$
$\int_{-\infty}^\infty x^2\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)}\,dx = \frac{\alpha+2\beta^2}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{(\beta^2-\alpha\gamma)/\alpha}$, $\alpha > 0$

Oppgave 1 Spinn

a) En spinn-tilstand kan betegnes som $\chi_{m_s}(s)$. Hvilke kvantetall kan elektronets spinn-tilstand ha? Hva betyr det for spinnets egenskaper at $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] \neq 0$?

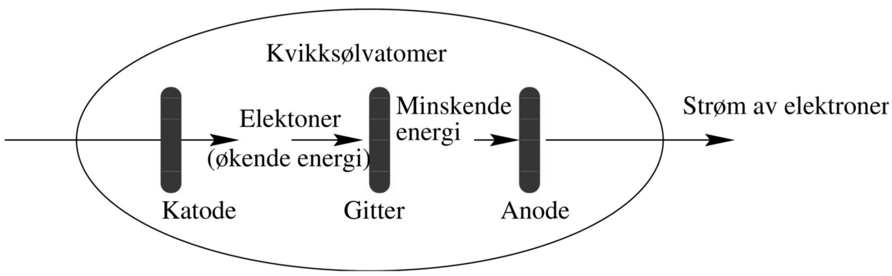
Svar: $s = 1/2$; $m_s = -1/2$ og $1/2$. Vi kan ikke samtidig vite verdiene på x- og z-komponentene til spinnet.

b) På hvilken måte man kan beskrive elektronets spinn som et angulærmoment. *HINT:* Teorien bak Stern–Gerlach-eksperimentet.

Svar: En elektrisk ladning som sirkulerer i en bane har et bane-angulærmoment, men det gir også opphav til et magnetisk dipolmoment, som kan kobles til et eksternt magnetisk felt. Eksperimenter viser at spinn også har et magnetisk dipolmoment som kan vekselvirke med et eksternt magnetisk felt på en lignende måte. Men spinn er ikke en bevegelse i en bane, uten effekten kalles i stedet for spinn-angulærmoment.

Oppgave 2 Franck-Hertz-eksperimentet

I denne oppgaven skal du se på Franck og Hertz sitt eksperiment med kvikksølv i 1914, med tilhørende målinger og resultater.



Figur 1: Skjematisk oppsett for Franck-Hertz-eksperimentet.

a) Beskriv eksperimentet og hensikten med dette.

Svar: Tekst fra kompendiet: elektroner akselereres gjennom en gass av kvikksølv vha. en påsatt spenning V_{KG} mellom katoden og gitteret. Mellom gitteret og anoden bremses så elektronene ned av en motspenning V_{GA} som er svakere enn V_{KG}. Hvis elektronene ikke taper noe energi på veien, vil de komme fram til anoden med en kinetisk energi $K_e = e\,V_{KA} = e(V_{KG} - |V_{GA}|)$. Hvis noen av elektronene derimot kolliderer med kvikksølvatomer underveis, vil de miste noe av sin kinetiske energi; er dette energitapet større enn $e\,V_{KA}$ når de ikke fram til anoden, og bidrar ikke til strømmen gjennom røret. Hensikten med eksperimentet er å bekrefte eksistensen av kvantiserte energitilstander i atomer, som forutsagt av Bohrs atommodell. (Merk at Schrödinger-ligningen ennå ikke var utviklet.)

b) Beskriv de to resultatene fra eksperimentet som bekreftet det som var hensikten.

Svar: (1) Elektroner akselererer opp til en kinetisk energi vha påsatt spenning mellom katoden og gitteret. Når et elektron kolliderer med kvikksølvatomet, og dermed overfører sin kinetiske energi til atomet slik at dette blir eksitert, bremses elektronet ned. Det betyr at færre elektroner når anoden. Strømmen faller for spenninger rundt 4.9 V (og multipler av 4.9 V), som er den energi som som er nok til å eksitere et kvikksølvatom (multipler av kvikksølvatomer). (2) Når kvikksølvatomet går tilbake til grunntilstanden, måles det en elektromagnetisk stråling med en spesifik bølgelengde som tilsvarer 4.9 eV.

Oppgave 3 Superposisjon

I denne oppgaven skal du studere en superposisjon Ψ av de ortonormerte energi-egentilstandene ψ_n:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{1}$$

a) Forklar hva som skjer med superposisjonen når du måler energien til den. Hvilken kvantefysisk informasjon får du fra koeffisientene c_n?

Ψ "kollapser" til en egentilstand; $|c_n|^2$ er sannsynl. for kollaps til n:te tilstand.

b) Vis at $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\,dx$.

$\int \psi_n^* \sum_m c_m \psi_m e^0 \, dx = \sum_m c_m \int \psi_n^* \psi_m \, dx = \sum_m c_m \delta_{nm} = c_n$, der vi brukt at $\{\psi_n\}$ er ortonormerte. Merk at vi må ha forskjellige indeks n og m.

c) Beregn koeffisienten c_4 for superposisjonen $\Psi(x,0) = A \cdot x \cdot \cos^3(Kx)$ for et elektron i en uendelig dyp brønn der $V(x) = 0$ for $0 \le x \le a$ med $a = 2\pi$ Å. De to konstantene i bølgefunksjonen er $A = 48/\sqrt{299\pi + 1920\pi^3}$ $\text{Å}^{-3/2}$ og $K = 2\,\text{Å}^{-1}$. *Hint*: Egenfunksjonene er $\sqrt{2/a}\,\sin(k_n x)$ for $0 \le x \le a$, og der $k_n = n\pi/a$.

$c_4 = \int_0^{2\pi} (\sqrt{1/\pi}\sin(2x))^* \, Ax\cos^3(2x)\,dx = (A/\sqrt{\pi}) \int x\cos^3(2x)\sin(2x)\,dx$.
Delvis integr. og $C \equiv -A/8\sqrt{\pi}\,\text{Å}^{-1} \quad \Rightarrow \quad c_4 = C\big(x\cos^4(2x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos^4(2x)\,dx\big)$
$= C\big(2\pi - (1/64)(24x + 8\sin 4x + \sin 8x)|_0^{2\pi}\big) = C\big(2\pi - 48\pi/64\big) =$
$(-A/8\sqrt{\pi})(80\pi/64) = (-A\sqrt{\pi})(10/64) \approx -0.28A = -0.055$.

d) Vis at kommutatoren $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ når den virker på tilstanden $\Psi(x,t)$.

$[\hat{x},\hat{p}]\Psi = x(-i\hbar\, d/dx)\Psi - (-i\hbar\, d/dx)x\Psi = -i\hbar(x\Psi' - (\Psi + x\Psi')) = i\hbar\Psi$.

Oppgave 4 Hydrogenatomet

Den radielle differensial-ligningen for hydrogenatomet er

$$\frac{d}{dr}\Big(r^2 \frac{d}{dr} R_{nl}(r)\Big) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E_n\Big) R_{nl}(r) - l(l+1)\,R_{nl}(r) = 0. \tag{2}$$

a) Vis at substitusjonen $u_{nl}(r) \equiv rR_{nl}(r)$ gir den modifierte Schrödinger-ligningen

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+V_{eff}(r)\Big)\,u_{nl}(r)=E_n\,u_{nl}(r), \quad \text{der } V_{eff}(r)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}.$$

$\frac{d}{dr}\big(r^2\frac{d}{dr}R\big)=\frac{d}{dr}\big(r^2\frac{d}{dr}\frac{u}{r}\big)=\frac{d}{dr}\big(r^2(\frac{u'}{r}-\frac{u}{r^2})\big)=\frac{d}{dr}(ru'-u)=u'+ru''-u'=ru''$
Multipliser deretter hele utrykket med $-\hbar^2/2mr$.

b) Beregn forventningsverdiene $\langle K\rangle$ for den kinetiske energien og $\langle V\rangle$ for den potensielle energien til grunntilstanden $u_{10}(r)=2a_0^{-3/2}r\,e^{-r/a_0}$, der a_0 er Bohr-radius. Oppgi verdiene i eV.

Svar: $\int_0^\infty u_{10}^*\,u_{10}\,dr=\int_0^\infty R_{10}^*\,R_{10}\,r^2\,dr=1$, og bruk gjerne
$\hbar^2c^2/2mc^2 = (197.3)^2/(2\cdot 0.511\times 10^6)$ nm^2 eller $-\hbar^2/2ma_0^2=E_1=-13.61\,\text{eV}$.

$\langle K\rangle=\frac{4}{a_0^3}\frac{-\hbar^2}{2m}\int re^{-r/a_0}\frac{d^2}{dr^2}re^{-r/a_0}\,dr=\frac{4E_1}{a_0}\int re^{-r/a_0}\frac{d^2}{dr^2}re^{-r/a_0}\,dr=$
$=\frac{4E_1}{a_0}\int re^{-r/a_0}\frac{(r-2a_0)}{a_0^2}e^{-r/a_0}dr=\frac{4E_1}{a_0^3}\big(\frac{2a_0^3}{8}-\frac{2a_0^3}{4}\big)=-E_1=13.61\,\text{eV}$

$l=0$ for grunntilstanden, så kun bidrag fra Coulomb-potensialet.
$\langle V\rangle=\frac{-4e^2}{a_0^3 4\pi\varepsilon_0}\int re^{-r/a_0}\frac{1}{r}re^{-r/a_0}\,dr=\frac{-e^2}{a_0^3\pi\varepsilon_0}\frac{a_0^2}{4}=\frac{-e^2k_e}{a_0^2}\frac{\hbar^2}{mk_ee^2}=2E_1=-27.2\,\text{eV}.$
Samme energier som i Bohrs atommodell; se midtveiseksamen v23.

c) Hvor kommer kvantiseringen i energiene fra, eller med andre ord, hvilken del i teorien og matematikken til kvantefysikken tillater ikke et kontinuerlig energispektrum for hydrogenatomet? Hva ville skje med elektronene i alle atomer hvis energifordelingen var kontinuerlig?

Svar: Grensebetingelse for de bundne tilstandene. Alle elektronene ville ha energi nær grunntilstanden, kontinuerlig fordelt med sannsynlighetsfordelingen (her, Fermi–Dirac-statistikk). Paulis ekslusjonsprinsipp gjelder fortsatt.

Oppgave 5 Hydrogen-molekylet

Denne oppgaven handler om hydrogen-molekylet, H_2. Kjerne-delen til den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen er

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2M_1}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2M_2}\nabla_2^2+V(R_0)+\frac{1}{2}M\omega^2\big(R-R_0\big)^2\Big)\,\Theta(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)=E_{nl}\,\Theta(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2), \quad (3)$$

og systemets energi er beskrevet av

$$E_{nl}=V(R_0)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2MR_0^2}+\big(n+\frac{1}{2}\big)\hbar\omega. \quad (4)$$

$R=|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2|$ er avstanden mellom de to atomene, og $R_0=0.74$ Å er likevektsavstanden for H_2-molekylet. $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$ er den reduserte massen, og hydrogen-atomet har massen $M_H=1.67\times 10^{-27}$ kg $=939\,\text{MeV/c}^2$. I tillegg er $V(R_0)=-4.52\,\text{eV}$ og $\omega=7.90\times 10^{14}$ rad/s for H_2.

a) Beskriv de tre bidragene til den totale energien for systemet. Forklar hvorfor teorien for harmonisk oscillator er viktig for systemet. Beskriv også den angulære delen av egenfunksjonene til Schrödinger-ligningen.

Svar: Potensiell energi ved likevektsavstanden, rotasjonenergi og vibrasjonenergi. Ved grunntilstanden (energiminimum) er potensialet omtrent parabolisk da den lineære ledd er null, derfor er teorien for harmonisk oscillator viktig for systemet. Sentralsymmetrisk potensial, så angulære delen er $Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$.

b) Beregn frekvensen og tilsvarende bølgelengde til et foton som kan eksitere molekylet opp fra grunntilstanden.

Svar: Grunntilstand når $\{n, l\} = \{0, 0\}$. Eksiterte tilstand for $\Delta n = 1$ og $\Delta l = 1$.
$\Delta E = \hbar^2 c^2/([M_\mathrm{H}/2]c^2 R_0^2) + \hbar\omega = (197.3)^2/(469 \times 10^6 \cdot 0.074^2) + \hbar \cdot 7.90 \times 10^{14} = 0.0152 + 0.520\,\mathrm{eV} = 0.535\,\mathrm{eV}$.
$E_\gamma = \Delta E = h\nu \ \Rightarrow \nu = 0.528q/h = 129\,\mathrm{THz}$, og $\lambda = c/\nu = 2320$ nm.

Oppgave 6 To-elektron-system

I denne oppgaven skal du se på to-elektron-systemet. De to elektronene er identiske (dvs. ikke mulig å skille mellom), men vi antar at de ikke vekselvirker via Coulomb-krefter. Et enkelt elektron beskrives som $\psi_a(\mathbf{r}, s) = \psi_\alpha(\mathbf{r})\chi_{m_s}(s)$.

a) Forklar hva Paulis ekslusjonsprinsipp betyr. Forklar også hvorfor prinsippet gjelder for fermioner, men ikke for bosoner.

Svar: To fermioner kan ikke være i samme tilstand. For identiske partikler så må sannsynlighetsfordelingen $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2)|^2$ ikke endres ved koordinatbytte. Det betyr at $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2) = \pm\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, s_2, s_1)$, der familje-gruppen med "$-$ tegn" (antisymmetriske) kalles fermioner, og familje-gruppen med "+ tegn" (symmetriske) kalles bosoner. To-elektron-systemet må derfor ha en bølgefunksjon som ser ut som $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2) = (1/\sqrt{2})(\psi_a(\mathbf{r}_1, s_1)\psi_b(\mathbf{r}_2, s_2) \pm \psi_b(\mathbf{r}_1, s_1)\psi_a(\mathbf{r}_2, s_2))$, med "$-$" for fermioner og "+" for bosoner.
Anta nå att begge partiklene er i samme tilstand, dvs., $a = b$. For fermioner betyr det at $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2)$ er lik 0, som selvfølgelig ikke gir en fysisk sannsynlighetsfordeling. For bosoner blir $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1, s_1)\psi_a(\mathbf{r}_2, s_2)$, som er lik $\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, s_2, s_1)$, og som resulterer i en korrekt sannsynlighetsfordeling ved koordinatbytte. Merk at $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, s_2, s_1)|^2$ også for fermioner når $a = b$, men sannsynlighetsfordelingen er da 0 i hele rommet.

b) Se nå på de to elektronene i heliumatomet, og anta at en-elektron-tilstandene kan beskrives som hydrogen-lignende. Skriv ned energi-egenfunksjonen for grunntilstanden til heliumatomet.

Svar: Grunntilstand: Begge elektronene er i laveste en-elektron-tilstand, og har da begge rom-delen $\psi_{100}(\mathbf{r})$; rom-delen er derfor symmetrisk mht koordinatbytte. Spinn-tilstanden må da være anti-symmetrisk, dvs. singlett-tilstand:
$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{100}(\mathbf{r}_1)\psi_{100}(\mathbf{r}_2)\big(\chi_{1/2}(s_1)\chi_{-1/2}(s_2) - \chi_{-1/2}(s_1)\chi_{1/2}(s_2)\big)$.

Sensorveiledning for konteeksamen
FYS2140 Vår 2023

Til denne sensurveiledning er det laget et detaljert løsningsforslag som utgjør en viktig del av poengsettingen. Alle oppgaver blir rettet av to lærere/fagpersoner.

Oppgavene rettes med disse maksimale poeng per deloppgave:

1a 2	**2a 2**	**3a 2**	**4a 3**	**5a 3**	**6a 2**
1b 3	**2b 3**	**3b 3**	**4b 3**	**5b 3**	**6b 2**
		3c 4	**4c 2**		
		3d 2			

Totalt er dette 39 poeng som skal tilsvare 80% av totalkarakter på kurset (midtveiseksamen teller 20%). Vi vil derfor gange poengene som gis med faktoren 80/39.

- Det gis null poeng på deloppgaver hvis den ikke er besvart eller at besvarelsen ikke er relevant.
- Det gis fullt poeng på deloppgaver hvis det er i henhold til løsningsforslaget eller løst på annen fornuftig måte. Det skal ikke trekkes poeng hvis besvarelsen er besvart ved hjelp av matematisk/numerisk bevis, selv om det er uttrykt i oppgaveteksten «vis (uten regning) at så og så…» eller liknende.
- Det gis 1/3 ≈ 30% av fullt poeng hvis kandidaten er noe på vei mot riktig svar.
- Det gis 2/3 ≈ 70% av fullt poeng hvis kandidaten er nesten helt framme eller slurvefeil.
- Det gis 1/2 = 50% av fullt poeng hvis deloppgaven er halvferdig besvart.
- Det gis tilnærmet fullt poeng hvis tankemåten er riktig, men følgefeil.
- Det gis ikke tilleggspoeng for tilleggstekst som ikke er relevant for spørsmålet, selv om tekstens innhold er riktig isolert sett.
- Hvis det leveres tilleggstekst som det ikke ble spurt om og som avslører manglene innsikt, gis 90% av foreslått poeng.