FYS2140 Hjemmeeksamen – Vår 2015

12. mars 2015

Viktig info:

- Merk besvarelsen med kandidatnummer, ikke navn!
- Innleveringsfristen er fredag 20. mars kl. 14.30 i skranken på ekspedisjonskontoret. (Ikke oblighylla!) Husk å kvittere på liste.
- Leveringsfristen er absolutt.
- Behold en egen kopi av din besvarelse! (Du får ikke tilbake besvarelsen.)
- Hjemmeeksamen teller ca. 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å bestå kurset.
- Dere har full anledning til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon, og til samarbeid. Til gjengjeld skal besvarelsen være individuell, og i egne ord, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen.
- Der vi ber om kommentarer eller forklaringer, ønsker vi korte og konsise svar som viser at dere har forstått spørsmålet. Det å uttrykke seg klart skriftlig er en del av hjemmeeksamen. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruk fornuftige enheter i regningen, noen av oppgavene med numeriske svar er nær umulig å få til uten.
- Eventuell programkode vil ikke taes i betraktning i vurderingen av besvarelsen, men du kan gjerne legge ved relevante plott av resultater.
- Lykke til!

Det er i alt mulig (på en god dag) å få 20 poeng på denne hjemmeeksamen. Noen av oppgavene skal løses numerisk. Kompendiet om programmering, samt eksemplene på hjemmesiden, kan her være nyttige.

Oppgave

I denne oppgaven skal vi se på tunnelering. Dette er et fenomen med mange praktiske anvendelser, spesielt i moderne teknologi, men her skal vi se litt mer abstrakt på problemet.

Vi ser først på en fri partikkel som begynner i en tilstand gitt ved bølgepakken

$$\Psi(x,0) = Ae^{-(x-x_0)^2/4a^2}e^{ilx}, \tag{1}$$

hvor A er en normeringskonstant, og x_0, a og l er tre reelle parametre.

a) Finn A. [1 poeng]

b) Lag et plott av sannsynlighetstettheten til denne tilstanden. Husk enheter på aksene. Velg konstanter selv, men vi anbefaller lengder på picometernivå. Hva forteller de tre konstantene oss? *Hint:* For å forstå betydningen av l kan det lønne seg å finne $\langle p \rangle$ for denne tilstanden. [2.5 poeng]

c) Denne bølgepakken har ikke en skarpt bestemt energi, men vis at forventningsverdien kan skrives som

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2(l^2 + 1/4a^2)}{2m}. \tag{2}$$

[1.5 poeng]

d) Gitt (boks)potensialet

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}, \tag{3}$$

hvor $V_0 > 0$, finn (analytisk) sannsynligheten for transmisjon som funksjon av energien for en fri-partikkel planbølgeløsning $\psi(x) = Ae^{ikx}$ med energi $E < V_0$, som kommer inn fra venstre. Tegn en figur som klart viser de forskjellige områdene i potensialet, og de innkommende og utgående bølgene som er relevante. [3 poeng]

e) Bruk potensialet i oppgave **d)** med verdiene $V_0 = 1\,\mathrm{MeV}$ og $L = 0.25\,\mathrm{pm}$. Se på et elektron med masse $m = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$ som kommer inn fra venstre, nå med initialtilstand gitt ved (1). Gjør en numerisk simulering ved hjelp av Schrödingerligningen av hva som skjer dersom du starter elektronet med $x_0 = -5.0\,\mathrm{pm}$, $a = 1.0\,\mathrm{pm}$ og $l = 2.0\,\mathrm{pm}^{-1}$. Ut i fra denne simuleringen, gi en kort beskrivelse av hva som skjer med bølgefunksjonen til elektronet når den treffer potensialhindringen. Snakk med din lokale datamaskin. [2 poeng]

f) Hvordan kan man finne sannsynligheten for transmisjon numerisk for situasjonen i oppgave **e)**? [1.0 poeng]

g) Finn *numerisk* sannsynligheten for transmisjon av bølgepakken i (1) som funksjon av energien, og sammenlign med svaret i oppgave **d)**. Det holder om du regner ut transmisjonssannsynligheten for en håndfull verdier av energien. *Hint:* Bølgepakken vi sender inn har ikke en skarpt bestemt energi, så bruk $\langle E \rangle$ for energien. [2 poeng]

Til nå har vi regnet med Schrödingerligningen, som gir en ikke-relativistsisk kvantemekanisk beskrivelse. Vi skal her se på relativistiske korreksjoner til denne. Vi tar utgangspunkt i Einsteins forhold mellom energi og bevegelsesmengde

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{4}$$

hvor p her er den relativistiske bevegelsesmengden.

h) Vis at energien kan skrives som

$$E \simeq E_0 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}, \tag{5}$$

der $E_0 = mc^2$ er hvileenergien, dersom $p^2c^2 \ll m^2c^4$. [1 poeng]

i) På forelesning har vi diskutert hvordan man kan rettferdiggjøre Schrödingerligningen for en fri partikkel hvor $V = 0$. Argumenter med utgangspunkt i uttrykket (5) hvorfor det følgende utgjør en rimelig relativistisk korreksjon til Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} + E_0\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{6}$$

og vis at den har den samme fri-partikkel planbølgeløsningen som Schrödingerligningen

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}. \tag{7}$$

[2 poeng]

j) Finn gruppehastigheten v_g til en fri partikkel som beskrives av differensialligningen i **i)**. Sammenlign mv_g med den relativistiske bevegelsesmengden p. Hvordan vil du tolke v_g her? [2 Poeng]

k) Bruk differensialligningen (6) til å finne (numerisk) transmisjonssannsynligheten, som funksjon av energien, til en partikkel beskrevet av initialbetingelsen (1) som møter potensialet i (3). Hvilke energier er det rimelig å anta at denne beskrivelsen er god for? Sammenlign med transmisjonssannsynligheten fra deloppgave **d)** og **g)**. [2 poeng]