UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Midtveiseksamen i: FYS2140 Kvantemekanikk

Utleveringsdato: Fredag 17. mars kl 16:00

Innleveringstidspunkt: Fredag 24. mars kl. 16:00

Utsatt innleveringstidspunkt: Mandag 27. mars kl. 12:00

Oppgavesettet er på: 3 sider

Lovlige hjelpemidler: Alle informasjonskanaler, inklusive medstudenter. Men enhver står selv ansvarlig for det som skrives i besvarelsen og må selv kunne redegjøre for dette.

Oppgave 1: Spredning fra δ-funksjoner I denne oppgaven skal vi se på spredning fra δ-funksjonspotensialer. Tidligere har vi sett på spredning fra et slikt frastøtende potensial. Dersom potensialet har styrke V_0, kan de transmitterte og reflekterte fluksene skrives som (husk at $T + R = 1$):

$$T = \frac{k^2}{1+k^2} \quad \text{og} \quad R = \frac{1}{1+k^2}. \tag{1}$$

Her er $k = \frac{\sqrt{2E}}{V_0}$, og vi har brukt såkalte naturlige enheter der $\hbar = m = 1$.

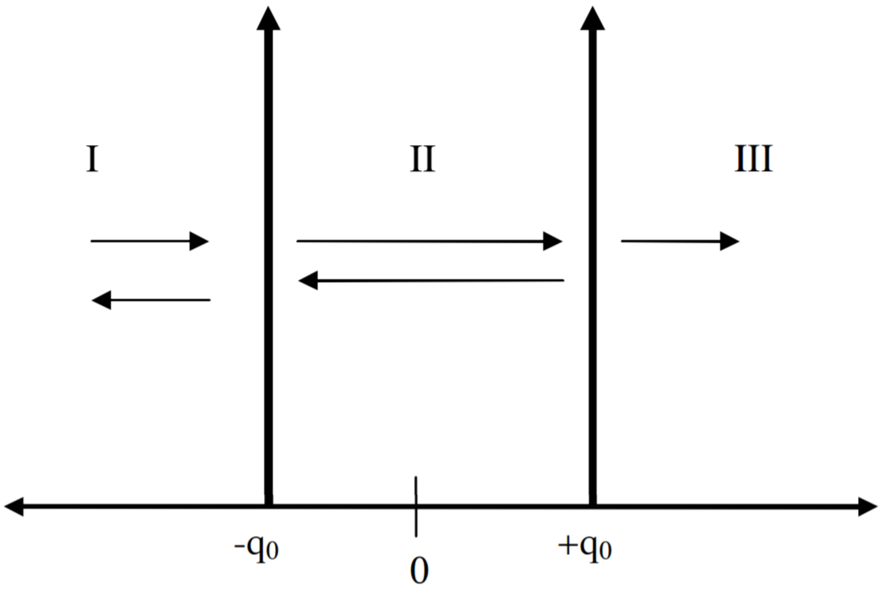
I denne oppgaven skal vi se på spredning fra to repulsive δ-funksjoner med styrke V_0. Disse er tegnet i Figur 1.

Det kunne her vært fort gjort å anta at sannsynligheten for transmisjon gjennom **to** barrierer alltid vil være *mindre* enn gjennom en (Det vil si, bare partikler som kommer seg gjernnom den første barrieren kan komme seg gjennom den andre også). I denne oppgaven skal du vise at dette ikke nødvendigvis er tilfellet, og gi en passende forklaring. Derfor, anta potensialet

$$V(x) = V_0\delta(x - q_0) + V_0\delta(x + q_0). \tag{2}$$

a) Anta at en partikkel kommer inn mot barrierene fra venstre, med energi E. Del systemet inn i tre regioner som vist i Figur 1, og bestem spredningstilstanden ved å kombinere de tillatte bølgefunksjonene i hver region. Husk å ta høyde får diskontinuiteten i den deriverte av bølgefunksjonen ved hver δ-funksjon.

b) Finn uttrykk for de totale sannsynlighetene for transmisjon og refleksjon som funksjoner av E, q_0 og V_0. Det vil si, bestem sannsynlighetsfluksen av partikler i region I som beveger seg mot venstre (reflekterte partikler), og sannsynlighetsfluksen av partikler i region III som beveger seg mot høyre (transmitterte partikler). Sjekk at fluksen er bevart!



Figur 1:

c) Vis at, for noen verdier av E, q_0 og V_0, så vil den transmiterte fluksen være større når partiklen spres fra to δ-funksjoner enn fra bare en. Finn/utled en forklaring på dette fenomenet. Det kan være nyttig å tegne/plotte den reelle delen av bølgefunksjonen for et valgt sett av E, q_0 og V_0 der dette fenomenet forekommer. Dersom du bestemmer $E, V_0 = 1$, hvilken separasjon av δ-funksjonene q_0 gir maksimal transmisjon?

Oppgåve 2 Harmonisk oscillator i to dimensjoner Vi har potensialet

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

I to dimensjoner og med kartesiske koordinater er Laplace-operatoren gitt ved

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

a) Skriv ned den tidsuavhengige Schrödingerligningen med dette potensialet.

b) Separer ligningen med $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Navngi separasjonskonstantene dine. Skriv ned de to uavhengige ordinære differensialligningene du får, og kommenter dem. Hva er sammenhengen mellom separasjonskonstantene dine og energien fra den fulle tidsuavhengige Schrödingerligningen? Hvordan tolker du dette?

Oppgave 3 Denne oppgaven handler om et eksperiment på et kvantemekanisk system som kan beskrives med to basis-tilstander. I dette eksperimentet starter systemet i grunntilstanden til Hamilton-operatoren $\mathbf{H_0}$ ved tiden t_1. Det eksperimentelle oppsettet har et apparat, som når det blir startet hurtig forandrer Hamilton-operatoren fra $\mathbf{H_0}$ til $\mathbf{H_1}$ (og lar den forbli $\mathbf{H_1}$). Du starter dette apparatet ved tiden t_1. Så, ved tiden $t_D > t_1$ gjør du en måling av en observabel D beskrevet av operatoren $\mathbf{D}$. Hamiltonoperatorene og $\mathbf{D}$ er gitt som dimensjonsløse matriser:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sett $\hbar = 1$ i denne oppgaven.

a) Hvilke måleresultater kan du få ved målingen av D? Hva er tilstanden til systemet etter hvert av disse måleresultatene?

b) Hva vil den gjennomsnittlige verdien av målingene av D være (som funksjon av t_1 og t_D) dersom du repeterer eksperimentet veldig mange ganger?

c) Ved t_D måler du i rask rekkefølge[a]: D, så energien, og så D igjen. Hva er sannsynligheten for at de to målingene av D gir samme resultat?

d) Du utfører eksperimentet, men mistenker at det er noe galt med apparatet ditt slik at det skrur seg av systematisk ved tiden t_2 mellom t_1 og t_D. Med andre ord, ved tiden t_2, mistenker du at Hamilton-operatoren går brått tilbake til å være $\mathbf{H_0}$. Hvilken kvalitativ virkning vil dette ha på resultatet i deloppgave b) ? [NB! Vi er kun ute etter en kvalitativ beskrivelse, ikke en fullstendig beregning.]

[a] med essensielt ingen tid imellom