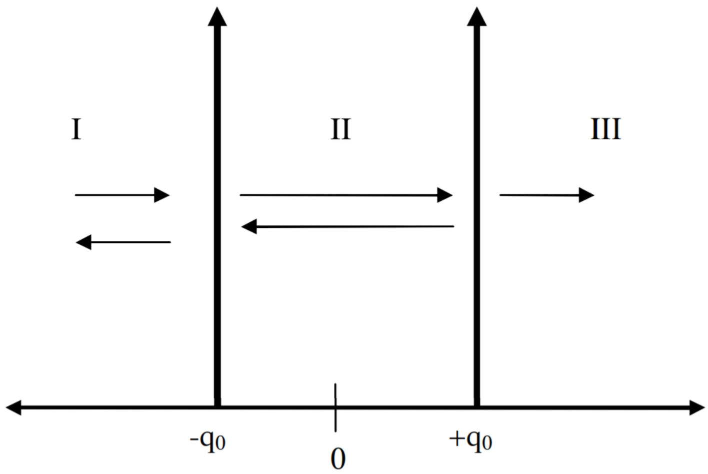
Oppgave 1: Spredning fra δ-funksjoner

I denne oppgaven skal vi se på spredning fra δ-funksjonspotensialer. Tidligere har vi sett på spredning fra et slikt frastøtende potensial. Dersom potensialet har styrke V_0, kan de transmitterte og reflekterte fluksene skrives som (husk at $T + R = 1$):

$$T = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2} \quad \text{og} \quad R = \frac{1}{1+\kappa^2}. \tag{1}$$

Her er $k = \frac{\sqrt{2E}}{V_0}$, og vi har brukt såkalte naturlige enheter der $\hbar = m = 1$.

I denne oppgaven skal vi se på spredning fra to repulsive δ-funksjoner med styrke V_0. Disse er tegnet i Figur 1.



Figur 1

Det kunne her vært fort gjort å anta at sannsynligheten for transmisjon gjennom **to** barrierer alltid vil være *mindre* enn gjennom en (Det vil si, bare partikler som kommer seg gjernnom den første barrieren kan komme seg gjennom den andre også). I denne oppgaven skal du vise at dette ikke nødvendigvis er tildellet, og gi en passende forklaring. Derfor, anta potensialet

$$V(x) = V_0\delta(x - q_0) + V_0\delta(x + q_0). \tag{2}$$

[a)]

Anta at en partikkel kommer inn mot barrierene fra venstre, med energi E. Del systemet inn i tre regioner som vist i Figur 1, og bestem spredningstilstanden ved å kombinere de tillatte bølgefunksjonene i hver region. Husk å ta høyde får diskontinuiteten i den deriverte av bølgefunksjonen ved hver δ-funksjon.

Svar:

På hver side av delta-funksjonene, vil potensialet være lik null. Derfor kan den generelle løsningen av den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen i hvert område (I, II, III) skrives som

$$\psi_i = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{3}$$

der $k = \sqrt{2E}$ når $\hbar, m_e = 1$. Ettersom bølgen er innkommende fra venstre (mot høyre), kan det ikke være noen bølge som går mot venste i region III. Dermed er bølgefunksjonen i hver region

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < -q_0) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (-q_0 < x < q_0) \\ Fe^{ikx} & (x > q_0) \end{cases}$$

Vi ønsker nå å uttrykke hver av koeffisientene B, C, D, F ved normaliseringskonstanten til den innkommende bølgen, A. Dette gjør vi ved å ta utgangspunkt i kravene for kontinuitet i bølgefunksjonen, og diskontinuitet i den førstederiverte av bølgefunksjonen.

Kontinuitet i $x = -q_0$:

$$\begin{aligned}
\psi_I(-q_0) &= \psi_{II}(-q_0) \\
Ae^{-ikq_0} + Be^{ikq_0} &= Ce^{-ikq_0} + De^{ikq_0} \\
Ae^{-2ikq_0} + B &= Ce^{-2ikq_0} + D \\
\boldsymbol{\beta A + B} &= \boldsymbol{\beta C + D,}
\end{aligned}$$

hvor vi definerte $\beta \equiv e^{-2ikq_0}$.

Kontinuitet i $x = q_0$:

$$\begin{aligned}
\psi_{II}(q_0) &= \psi_{III}(q_0) \\
Ce^{ikq_0} + De^{-ikq_0} &= Fe^{ikq_0} \\
C + De^{-2ikq_0} &= F \\
\boldsymbol{C + \beta D} &= \boldsymbol{F.}
\end{aligned}$$

Diskontinuitet i $x = -q_0$:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=-q_0} &= 2V_0\psi(-q_0) \\
\frac{\mathrm{d}\psi_{II}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=-q_0} - \frac{\mathrm{d}\psi_I}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=-q_0} &= 2V_0\psi_I(-q_0) \\
ik\Big(Ce^{-ikq_0} - De^{ikq_0}\Big) - ik\Big(Ae^{-ikq_0} - Be^{ikq_0}\Big) &= 2V_0\Big(Ae^{-ikq_0} + Be^{ikq_0}\Big) \\
Ce^{-ikq_0} - De^{ikq_0} - Ae^{-ikq_0} + Be^{ikq_0} &= -\frac{2iV_0}{k}\Big(Ae^{-ikq_0} + Be^{ikq_0}\Big).
\end{aligned}$$

Her er det viktig å få med seg fortegnet! Vi må her passe på å ta hensyn til at potensialet er positivt, og ikke negativt (som er det vi har studert tidligere). Vi definerer nå $\gamma \equiv 2iV_0/k$, slik at den tredje ligningen blir

$$\begin{aligned}
\beta C - D - \beta A + B &= -\gamma(\beta A + B) \\
\boldsymbol{\beta C - D} &= \boldsymbol{\beta(1-\gamma)A - (1+\gamma)B.}
\end{aligned}$$

Diskontinuitet i $x = q_0$:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=q_0} &= 2V_0\psi(q_0) \\
\frac{\mathrm{d}\psi_{III}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=q_0} - \frac{\mathrm{d}\psi_{II}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=q_0} &= 2V_0\psi_{III}(q_0) \\
ikFe^{ikq_0} - ik\left(Ce^{ikq_0} - De^{-ikq_0}\right) &= 2V_0Fe^{ikq_0} \\
\boldsymbol{C - \beta D} &= \boldsymbol{(1+\gamma)F.}
\end{aligned}$$

Bestem koeffisientene. Vi har nå ligningssettet

$$\beta A + B = \beta C + D \tag{4}$$
$$C + \beta D = F \tag{5}$$
$$\beta C - D = \beta(1-\gamma)A - (1+\gamma)B \tag{6}$$
$$C - \beta D = (1+\gamma)F. \tag{7}$$

Vi begynner med å gjøre dette om til to linginger med to ukjente, og to ligninger med tre ukjente. Målet er å uttrykke koeffisientene ved hjelp av A. Først, legg sammen 5 og 7:

$$\begin{aligned}
C + \beta D + C - \beta D &= F + F + \gamma F \\
2C &= (2+\gamma)F.
\end{aligned}$$

Så, trekk 7 fra 5:

$$\begin{aligned}
C + \beta D - (C - \beta D) &= F - (1+\gamma)F \\
2D &= -\frac{\gamma}{\beta}F.
\end{aligned}$$

Legg så sammen 4 og 6,

$$2C = (2-\gamma)A - \frac{\gamma}{\beta}B,$$

og trekk 6 fra 4:

$$2D = (2+\gamma)B + \beta\gamma A.$$

Det nye ligningssettet er

$$2C = (2+\gamma)F \tag{8}$$
$$2D = -\frac{\gamma}{\beta}F \tag{9}$$
$$2C = (2-\gamma)A - \frac{\gamma}{\beta}B \tag{10}$$
$$2D = (2+\gamma)B + \beta\gamma A. \tag{11}$$

Ved å legge sammen hhv. 8 og 10, og 9 og 11, får vi (etter litt triksing) ligningene

$$\beta(2+\gamma)^2F = \beta(4-\gamma^2)A - \gamma(2+\gamma)B \tag{12}$$
$$-\frac{\gamma^2}{\beta}F = \gamma(2+\gamma)B + \beta\gamma^2 A. \tag{13}$$

Ved å legge disse to sammen, finner vi endelig F uttrykt ved A:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{F = \frac{4}{(2+\gamma)^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}} A.}} && (14)\\
&= \frac{k^2}{k^2 + 2iV_0k - V_0^2 + V_0^2 e^{4ikq_0}} A && (15)\\
&= \frac{2E}{2E + 2iV_0\sqrt{2E} - V_0^2 + V_0^2 e^{4i\sqrt{2E}q_0}} A && (16)
\end{aligned}
$$

Vi finner videre D ved

$$\underline{\underline{D = -\frac{\gamma}{2\beta} F = \frac{-2\gamma}{(2+\gamma)^2\beta - \frac{\gamma^2}{\beta}} A,}} \tag{17}$$

og C ved

$$\underline{\underline{C = \frac{2+\gamma}{2} F = \frac{2(2+\gamma)}{(2+\gamma)^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}} A}} = \frac{k^2 + ikV_0}{k^2 + 2iV_0k - V_0^2 + V_0^2 e^{4ikq_0}} A. \tag{18}$$

Til slutt kan vi bestemme B fra ligning 10 når vi nå har bestemt C, som gir

$$\underline{\underline{B = \frac{\frac{1}{\beta}\Big[(1-\beta^2)\gamma^2 - 2\gamma(1+\beta^2)\Big]}{(2+\gamma)^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}} A = \frac{(1-\beta^2)\gamma^2 - 2\gamma(1+\beta^2)}{\beta[(2+\gamma)^2 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}]} A.}} \tag{19}$$

[b)]

Finn uttrykk for de totale sannsynlighetene for transmisjon og refleksjon som funksjoner av E, q_0 og V_0. Det vil si, bestem sannsynlighetsfluksen av partikler i region I som beveger seg mot venstre (reflekterte partikler), og sannsynlighetsfluksen av partikler i region III som beveger seg mot høyre (transmiterte partikler). Sjekk at fluksen er bevart!

Svar: Det vi er ute etter her, er transmisjons- og refleksjonskoeffisientene

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{F^*F}{A^*A} \tag{20}$$

og

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{B^*B}{A^*A}. \tag{21}$$

Her er det viktig å ikke glemme at γ er et komplekst tall. Derfor innfører vi først nye definisjoner:

$$
\begin{aligned}
g &\equiv \frac{i}{\gamma} = \frac{k}{2V_0}\\
\phi &\equiv 4kq_0\\
&\rightarrow \beta^2 = e^{-i\phi}.
\end{aligned}
$$

Ved å innføre disse blir de interessante koeffisientene

$$F = \frac{4g^2}{(2g+i)^2 + e^{i\phi}} A$$

og

$$B = \frac{e^{-i\phi} - 1 - 2ig(1+e^{-i\phi})}{e^{-i\phi/2}[(2g+i)^2 + e^{i\phi}]}A$$
$$= \frac{(\cos\phi - 1 - 2g\sin\phi) - i(\sin\phi + 2g + 2g\cos\phi)}{e^{-i\phi/2}[(2g+i)^2 + e^{i\phi}]}A.$$

Transmisjonskoeffisienten blir da

$$T = \frac{F^*F}{A^*A} = \frac{(4g^2)^2}{[(2g-i)^2 + e^{-i\phi}][(2g+i)^2 + e^{i\phi}]}A \tag{22}$$
$$= \frac{16g^4}{[(4g^2 - 1 + \cos\phi) - i(\sin\phi + 4g)][(4g^2 - 1 + \cos\phi) + i(\sin\phi + 4g)]} \tag{23}$$
$$= \underline{\underline{\frac{8g^4}{(8g^4 + 4g^2 + 1) + \cos\phi(4g^2 - 1) + 4g\sin\phi}}}. \tag{24}$$
$$= \frac{k^4}{k^4 + 2V_0^2k^2 + 2V_0^4 + 2\cos\phi(k^2V_0^2 - V_0^4) + 4kV_0^3\sin\phi} \tag{25}$$
$$= \frac{2E^2}{(2E^2 + 2V_0^2E + V_0^4) + \cos\phi(2EV_0^2 - V_0^4) + 2\sqrt{2E}V_0^3\sin\phi} \tag{26}$$

Refleksjonskoeffisienten blir

$$R = \frac{B^*B}{A^*A} = \frac{(\cos\phi - 1 - 2g\sin\phi)^2 - i^2(\sin\phi + 2g + 2g\cos\phi)^2}{2[(8g^4 + 4g^2 + 1) + \cos\phi(4g^2 - 1) + 4g\sin\phi]} \tag{27}$$
$$= \underline{\underline{\frac{(4g^2 + 1) + \cos\phi(4g^2 - 1) + 4g\sin\phi}{(8g^4 + 4g^2 + 1) + \cos\phi(4g^2 - 1) + 4g\sin\phi}}}. \tag{28}$$

Det er nå også åpenbart at $\underline{\underline{R + T = 1}}$. Husk her at $m_e, \hbar = 1$, $k = \sqrt{2E}$, og at vi har definert $g = k/(2V_0)$ og $\phi = 4kq_0$.

[c)]

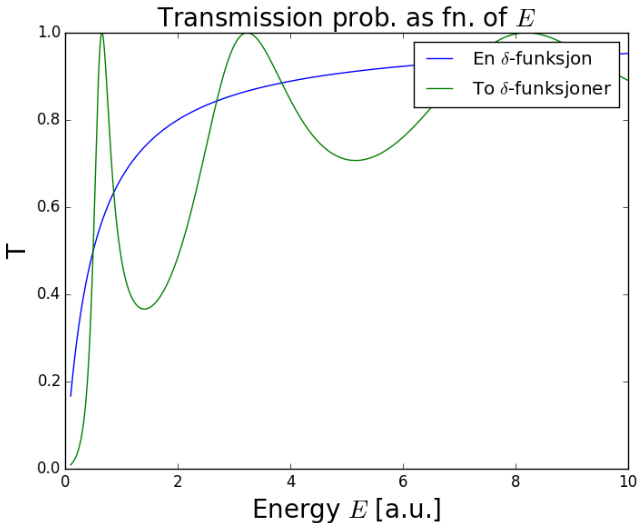
(i) Vis at, for noen verdier av E, q_0 og V_0, så vil den transmiterte fluksen være større når partiklen spres fra to δ-funksjoner enn fra bare en. (ii) Finn/utled en forklaring på dette fenomenet. Det kan være nyttig å tegne/plotte den reelle delen av bølgefunksjonen for et valgt sett av E, q_0 og V_0 der dette fenomenet forekommer. (iii) Dersom du bestemmer $E, V_0 = 1$, hvilken separajon av δ-funksjonene q_0 gir maksimal transmisjon?

Svar: (i) For tilfellet der det kun er en delta-funksjon, har vi at

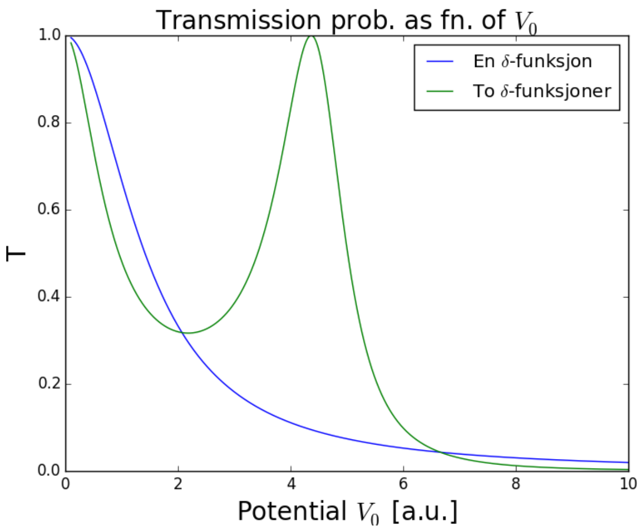
$$T = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2},$$

der $\kappa = \frac{\sqrt{2E}}{V_0}$. Dersom det er to delta-funksjonspotensialer til stede, vil den transmitterte fluksen være gitt ved Ligning 24. Vi kan vurdere T som funksjon av henholdsvis E, V_0 og q_0, ved å sette de to andre lik 1. Resultatet er vist i figurene under, der transmisjonskoeffisienten også er vist for tilfellet med kun et δ-funksjonspotensial. Figur 2 og 3 viser tydelig at det finnes sette med verdier for E, V_0 og q_0 der sannsynligheten for at partikkelen blir sluppet gjennom potensialene er større dersom to potensialer er til stede, i stedet for bare ett.

Vi kan notere oss noen viktige punkter fra figurene: Etterhvert som energien til partikkelen øker, går sannsynligheten for transmisjon mot 1. Når vi lar potensialet gå mot uendelig, går sannsynligheten for transmisjon mot null. Det som er verdt å merke seg her, er at (gitt $E, q_0 = 1$) $T = 1$ både for $V_0 = 0$, som sier seg selv, men også for $V_0 \sim 4.3$. Tilsvarende gjelder for $T(E)$ med $q_0, V_0 = 1$, for $E \sim 0.67$, $E \sim 3.2$ og $E \sim 8.1$ i intervallet vist i figuren.



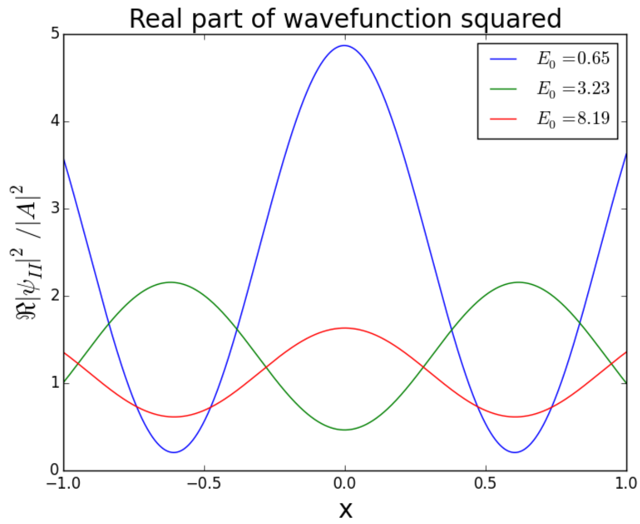
Figur 2



Figur 3

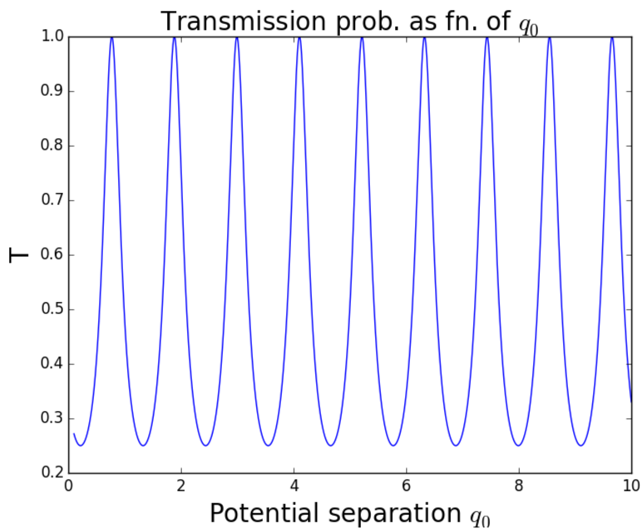
(ii) For å forklare fenomenet med at den transmiterte fluksen blir større når vi har to δ-funksjonspotensialer enn når vi bare har ett, begynner vi med å se på den reelle delen av bølgefunksjonen for verdiene $q_0 = 1, V_0 = 1$, og tre ulike verdier av E, da vi ser fra Figur

2 at den transmiterte fluksen i dette tilfellet er mye større med to δ-funksjoner. Dette er vist i figur 4.



Figur 4: $\Re|\psi_{II}(x)|^2$ *for* $V_0 = q_0 = 1$ *og* $E = 0.65$, $E = 3.23$ *og* $E = 8.19$.

(iii) Figur 5 viser den transmitterte fluksen som funksjon av separasjonskonstanten q_0 for $E, V_0 = 1$. Verdiene av q_0 som gir maksimal transmisjon T har konstant separasjon.



Figur 5

Vi kan finne de presise verdiene av q_0 ved å betrakte $T = 1$, som er maksimal transmisjon, for $E, V_0 = 1$, med $k = \sqrt{2}$:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{8g^4}{(8g^4 + 4g^2 + 1) + \cos\phi(4g^2 - 1) + 4g\sin\phi} \\
1 &= \frac{8(\frac{k}{2V_0})^4}{(8(\frac{k}{2V_0})^4 + 4(\frac{k}{2V_0})^2 + 1) + \cos(4kq_0)(4(\frac{k}{2V_0})^2 - 1) + 4(\frac{k}{2V_0})\sin(4kq_0)} \\
1 &= \frac{8(\frac{\sqrt{2}}{2})^4}{(8(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 + 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1) + \cos(4\sqrt{2}q_0)(4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 1) + 4(\frac{\sqrt{2}}{2})\sin(4\sqrt{2}q_0)} \\
2 &= 5 + \cos(4\sqrt{2}q_0) + 2\sqrt{2}\sin(4\sqrt{2}q_0) \\
q_0 &= \frac{\pi n - \arctan(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}},
\end{aligned}
$$

hvor n er et heltall. En alternativ fremgangsmåte her ville vært å derivere T med hensyn på q_0, og sette $T'(q_0) = 0$ for å finne maksima og minima av T.

Vi ser at maksimalverdien av T er 1, altså fullkommen transmisjon, og dette skjer med jevne mellomrom når q_0 øker. Fra ligningen 26 og definisjonen av $\phi = 4kq_0$ ser vi at T avhenger av q_0 gjennom funksjonene $\cos(4kq_0)$ og $\sin(4kq_0)$, som er periodiske med perioden $\Delta q_0 = \lambda/4$ der de Broglie bølgelengden $\lambda = 2\pi/k$. Siden seperasjonen mellom potensialtoppene er $2q_0$, ser vi at transmisjonsmaksimaene gjentar seg hver gang seperasjonen øker med $\lambda/2$. Denne typen ressonanseffekt er slik sett kvalitativ lik den man ser for stående lydbølger i et rør der kjente eksempler omfatter fløyter med dens grunn- og overtoner.

Oppgave 2: Harmonisk oscillator i to dimensjoner

Vi har potensialet

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

I to dimensjoner og med kartesiske koordinater er Laplace-operatoren gitt ved

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

a) Skriv ned den tidsuavhengige Schrödingerligningen med dette potensialet.

svar:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)\right)\psi(x, y) = E\psi(x, y).$$

b) Separer ligningen med $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Navngi separasjonskonstantene dine. Skriv ned de to uavhengige ordinære differensialligningene du får, og kommenter dem. Hva er sammenhengen mellom separasjonskonstantene dine og energien fra den fulle tidsuavhengige Schrödingerligningen? Hvordan tolker du dette?

svar:

Setter inn $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$ i ligningen:

$$\begin{aligned}
EX(x)Y(y)Y(y) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\right) + X(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 X(x)Y(y) + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 X(x)Y(y) \\
&= Y(y)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)X(x) \\
&\quad + X(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right)Y(y)
\end{aligned}$$

Altså er

$$E = \frac{1}{X(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)X(x) + \frac{1}{Y(y)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right)Y(y).$$

Her er venstre side en konstant, altså er høyre side også konstant. På høyre side er det ene leddet kun avhengig av x og det andre kun avhengig av y. Siden x og y er uavhengige er den eneste måten summen kan være konstant at begge leddene er konstante. Dermed kan vi skrive

$$E = E_x + E_y,$$

med

$$E_x X(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)X(x),$$

og

$$E_y Y(y) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right)Y(y).$$

Disse to ordinære differensialligningene er identiske med den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen for to uavhengige én-dimensjonale harmoniske oscillatorer! Dermed kan vi tolke E_x og E_y som energibidraget fra henholdsvis x- og y-retningen til den totale energien.

Oppgave 3: Harmonisk oscillator i to dimensjoner

a) Måleresultatene er egenverdiene til $\hat{D}$: $\underline{D_\pm = 1 \pm \sqrt{2}}$. Tilstanden til systemet etter en måling som ga egenverdien $D_\pm$ er de respektive normaliserte egenvektorene

$$\underline{d_\pm = \frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Fysiske tilstander er normaliserte. Så for å få full uttelling på denne deloppgaven må egentilstandene normaliseres.
Andre måter å skrive disse tilstandene på er

$$\begin{aligned}
d_\pm &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} \mp 1)^2}}\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} \mp 1\right)}}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} \mp 1\right)}}\begin{pmatrix} \pm(\sqrt{2} \mp 1) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^{1/4}}\begin{pmatrix} \pm\left[\sqrt{2} \mp 1\right]^{1/2} \\ \left[\sqrt{2} \mp 1\right]^{-1/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eller

$$d_+ = \begin{pmatrix} 0.3826834 \\ 0.9238795 \end{pmatrix}, \quad d_- = \begin{pmatrix} -0.9238795 \\ 0.3826834 \end{pmatrix}.$$

b) Ved tiden t_1 er systemet i grunntilstanden til $\hat{H}_0$: $\psi(t_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ved tiden t_D har denne tilstanden utviklet seg til: $\psi(t_D) = e^{-i\hat{H}_1(t_D - t_1)}\psi(t_1)$. Siden $\hat{H}_1$ er diagonal så vil

$$\psi(t_D) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2e^{-i(t_D - t_1)} \\ e^{-i3(t_D - t_1)} \end{pmatrix}$$

La oss forenkle notasjonen ved å innføre $\Delta t \equiv t_D - t_1$. Gjennomsnittsverdien til mange målinger av D er forventningsverdien av $\hat{D}$ i tilstanden $\psi(t_D)$:

$$\begin{aligned}
\bar{D} = \psi(t_D)^\dagger \hat{D} \psi(t_D) &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{i\Delta t} & e^{i3\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-i\Delta t} \\ e^{-i3\Delta t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{i\Delta t} & e^{i3\Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i3\Delta t} \\ 2e^{-i\Delta t} + 2e^{-i3\Delta t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(2e^{-i2\Delta t} + 2e^{i2\Delta t} + 2\right) \\
&= \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\cos(2\Delta t) = \underline{\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\cos(2(t_D - t_1))}
\end{aligned}$$

c) Etter den første målingen av D vil systemet befinne seg i tilstanden $d_\pm$ avhengig av måleresultatet. Sannsynligheten for å måle f.eks. verdien D_+ i den første målinga når tilstanden er $\psi \equiv \psi(t_D)$ er

$$P(D_+|\psi) = |d_+^\dagger \psi|^2$$

der d_+ er egenvektoren til egenverdien D_+, og $\dagger$ betyr transponert og kompleks konjugert. Så gjøres en energimåling. Etter denne vil systemet befinne seg i enten tilstanden $e_+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eller i $e_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ avhengig om måleresultatet ble $E_+(=1)$ eller $E_-(=3)$. Til slutt gjøres en ny måling av D. Sannsynligheten for å måle en spesifikk rekkefølge av resultater, f.eks. D_+,E_-, D_-, er $P(D_+, E_-, D_-) = P(D_-|e_-)P(E_-|d_+)P(D_+|\psi)$. Sannsynligheten for å få samme måleresultat i måling 1 og 3 får vi ved å legge sammen sannsynlighetene for alle de spesifikke rekkefølgene der måleresultatene i måling 1 og 3 er like:

$$\begin{aligned}
P_{samme} &= P(D_+, E_+, D_+) + P(D_+, E_-, D_+) + P(D_-, E_+, D_-) + P(D_-, E_+, D_-) \\
&= \left(|d_+^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_+|^2 + |d_+^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_+|^2\right) |d_+ \psi|^2 + \left(|d_-^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_-|^2 + |d_-^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_-|^2\right) |d_-^\dagger \psi|^2
\end{aligned}$$

Ved å sette inn de respektive egenvektorene så kan svaret finnes. Fra a) vet vi at $d_+^\dagger e_+ = 0.3826834$, $d_+^\dagger e_- = 0.9238795$, $d_-^\dagger e_- = 0.3826834$ og $d_-^\dagger e_+ = -0.9238795$ og vi får

$$P_{samme} = \left((0.3826834)^4 + (0.9238795)^4\right) \left(\underbrace{|d_+^\dagger \psi|^2 + |d_-^\dagger \psi|^2}_{1}\right) = \underline{0.75}$$

der vi har brukt at sannsynligheten for å måle D_+ eller D_- i den første målinga er 1.

Vi legger merke til at svaret ikke avhenger av ψ. Det kan vi også vise *uten* å bruke det eksplisitte uttrykket for egenvektorene fra a). La oss beregne sannsynligheten for at måleresultatene er *ulike*. Når det er gjort er det bare å bruke $P_{samme} = 1 - P_{ulike}$. Vi har

$$\begin{aligned}
P_{ulike} &= P(D_-, E_+, D_+) + P(D_-, E_-, D_+) + P(D_+, E_+, D_-) + P(D_+, E_+, D_-) \\
&= |d_-^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_+|^2 |d_+^\dagger \psi|^2 + |d_-^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_+|^2 |d_+^\dagger \psi|^2 \\
&\quad + |d_+^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_-|^2 |d_-^\dagger \psi|^2 + |d_+^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_-|^2 |d_-^\dagger \psi|^2 \\
&= |d_-^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_+|^2 \underbrace{\left(|d_+^\dagger \psi|^2 + |d_-^\dagger \psi|^2\right)}_{1} + |d_-^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_+|^2 \underbrace{\left(|d_+^\dagger \psi|^2 + |d_-^\dagger \psi|^2\right)}_{1}
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $|d^\dagger e|^2 = |e^\dagger d|^2$ som holder uavhengig av indeksene. Altså forsvinner avhengigheten av ψ, og svaret vil derfor ikke avhenge av t_D. Vi har nå fått et enkelt uttrykk

$$P_{ulike} = |d_-^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_+|^2 + |d_-^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_+|^2.$$

Vi bruker de eksakte resultatene fra oppgave 3a) og får

$$\begin{aligned}
|d_-^\dagger e_+|^2 |e_+^\dagger d_+|^2 &= \frac{1}{(8^{1/4})^4} (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{8} \\
|d_-^\dagger e_-|^2 |e_-^\dagger d_+|^2 &= \frac{1}{(8^{1/4})^4} \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

som gir $P_{ulike} = 1/8 + 1/8 = 1/4$. Vi får derfor sluttresultatet

$$P_{samme} = 1 - P_{ulike} = 1 - \frac{1}{4} \quad = \underline{\frac{3}{4}}$$

Dersom vi *ikke* hadde gjort energimålingen imellom de to målingene av D, så ville vi fått at sannsynligheten for å måle samme resultat ville blitt 1. Det spiller derfor en rolle om vi utfører denne energimålingen selv om vi ikke noterer ned resultatet av den.

d) $\cos(2t_D)$ avhengigheten i b) er en konsekvens av at energiforskjellen mellom energinivåene til $\hat{H}_1$ er 2. Egenenergiene til $\hat{H}_0$ er derimot -2 og 8, altså en energinivåforskjell på 10. Det betyr at dersom apparatet slutter å virke ved tiden t_2 så vil systemet oscillere fem ganger fortere. Forventningsverdien ved t_D vil oscillere som $a + b\cos(10(t_D - t_2) + \phi)$, der ϕ er en fasefaktor. Denne fasefaktoren og konstantene a og b vil avhenge av $t_2 - t_1$, men vil ikke avhenge av t_D. For å få poeng på denne oppgaven må svaret inneholde noe om denne oscillasjonsfrekvensen. Det gis ingen uttelling for å skrive at resultatet blir annerledes enn i b).