# FYS2140 Hjemmeeksamen – Vår 2018

Ditt **kandidatnummer**

15. mars 2018

## Viktig info:

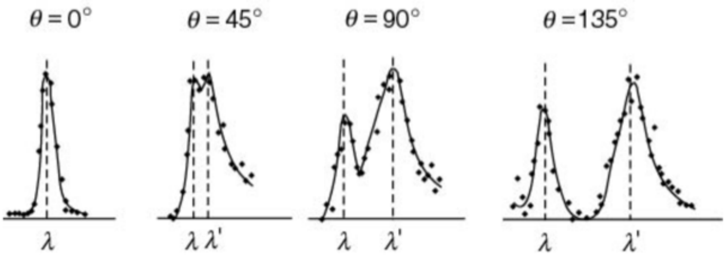
- Elektronisk innlevering på devilry med frist fredag 23. mars 2018 kl. 16:00. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, ikke foto med mobiltelefon.
- Besvarelsen må merkes tydelig med ditt kandidatnummer (finnes på Studentweb) fordi innleveringen skjer anonymt. Besvarelser uten kandidatnummer stryker automatisk.
- Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å gå opp til endelig eksamen.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i regningene.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men legg gjerne ved relevante plott og programkode.
- Lykke til!

## Oppgave 1 Partikkel-bølge dualitet

### Fotoners partikkelnatur

**a1)** Skriv opp Comptons formel. Tegn en prinsippskisse av fotonspredning. Forklar symbolene i formelen og skissen. Regn ut Compton-bølgelengden for elektroner.

**a2)** Arthur Holly Compton brukte røntgenstråling med bølgelengde $\lambda = 0.0709$ nm. I hvilken vinkel (se Fig. 1) målte han $\lambda' = 0.0749$ nm?




Figur 1: Data fra Comptons eksperiment. Figuren viser antall fotoner som funksjon av bølgelendge i forskjellige spredningsvinkler.

**a3)** Hva skyldes den første toppen til venstre i spektrene? Hvorfor ble det ikke brukt synlig lys i dette eksperimentet?

### Nøytroners bølgenatur

**b1)** Vi ønsker å studere bølgeegenskapene for termiske nøytroner i likevekt med omgivelsene ved temperatur 25°C. Nøytronenes gjennomsnittlige energi er gitt ved $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$. Finn gjennomsnittlig energi, bevegelsesmengde og bølgelengde for nøytronene[1].

**b2)** Vi bruker Braggdiffraksjon for å velge ut (filtrere) nøytroner med en bestemt bølgelengde. En avgrenset stråle av nøytronene sendes på skrå ned mot en NaCl-krystalloverflate. Krystallen har krystall-lag med avstand $d = 2.82$ Å mellom hvert lag. I dette eksperimentet skal vi filtrere ut nøytroner med bølgelengde 1.85 Å. For hvilken innkommende (og utgående) vinkel har disse nøytronene maksimal intensitet? Hvilket område i vinkler kreves for å filtrere ut bølgelengder med spredning mindre enn $|\Delta\lambda|/\lambda = 10\%$?

[1] Dette skal gjøres enkelt, du slipper å ta hensyn til hvordan enegifordelingen ser ut. Bruk fornuftige enheter.

**Oppgave 2 Radioaktivt $\alpha$-henfall**

I denne oppgaven skal vi se på radioaktivt $\alpha$-henfall ved hjelp av to ulike potensialer. Noen av oppgavene skal løses analytisk, mens andre vil være tilnærmet umulige å løse uten hjelp fra numeriske metoder. Det kan være lurt å studere nærmere kompendiet i programmering skrevet av Benedicte Emilie Brække og Mari Røysheim (du finner det under ressurser på kursets hjemmeside). Finn selv fram til konstanter som ikke er oppgitt, men som du måtte trenge.

Atomkjernen for helium ($^4$He kalles ofte $\alpha$-partikkel) er spesielt sterkt bundet. Den finnes derfor i rikelige mengder i universet og i vår egen sol. Det som kanskje ikke er så kjent, er at $\alpha$-partikkelen kan eksistere lenge som en stabil partikkel inne i atomkjernen før den sendes ut. Denne type $\alpha$-henfall finner vi ofte for tunge atomkjerner som uran og thorium.

Halveringstiden $T_{1/2}$ for $\alpha$-henfall avhenger av hvor lett (eller vanskelig) $\alpha$–partikkelen vil kunne trenge gjennom den såkalte Coulomb-barrieren. Ettersom denne barrieren stort sett er den samme for de tunge atomkjernene, så blir $\alpha$–partikkelens energi en viktig parameter for beregning av $T_{1/2}$.

Den tilhørende tunneleringssannsynligheten kan variere med en faktor opptil $10^{20-25}$ mellom atomkjerner med samme antall protoner (isotoper). For eksempel finner vi for thorium-isotopene at $^{232}$Th har $T_{1/2} = 1.4\times 10^{19}$ år med $E_\alpha = 4.08$ MeV, mens $^{218}$Th har $T_{1/2} = 1.0 \times 10^{-7}$ s med $E_\alpha = 9.85$ MeV.

Vi skal spesielt se på radium som henfaller til radon gjennom reaksjonen $^{226}\text{Ra} \to\ ^{222}\text{Rn} + \alpha$. Atomkjernen $^{226}$Ra har en halvveringstid på $T_{1/2} = 1600$ år og sender ut en $\alpha$-partikkel med energi $E_\alpha = 4.8$ MeV. Vi antar at radius til disse tunge kjernene er $R = 7.3$ fm.

Vi forenkler oppgaven ved at vi regner potensialet som en-dimensjonalt. Posisjonen $x$ er dermed et uttrykk for $\alpha$-partikklelens avstand fra atomkjernens senter. For energi og lengde, anbefaler vi å bruke henholdsvis enheter MeV og fm.

**a)** Vi tilnærmer $\alpha$-partikkelen ved en Gaussisk bølgepakke med bølgefunksjon

$$\Psi(x,0) = Ae^{-(x-x_0)^2/4a^2}e^{ikx} \tag{1}$$

ved tiden $t = 0$. Vis at normeringskonstanten blir $A = (1/2\pi a^2)^{1/4}$, og plott $|\Psi(x,0)|^2$ som funksjon av posisjonen. Husk enheter på aksene. Velg konstantene $x_0 = 5$ fm, $a = 1$ fm og $k = 1.38$ fm$^{-1}$. Hvilken energi har $\alpha$-partikkelen?

**b)** Vi skal beskrive $\alpha$–partikkelen som fanget i kjernen ved hjelp av en potensialbarriere med høyde $V_0$. Det vi skal studere er spredningstilstander der partikkelen har energi $0 < E < V_0$. Partikkelen er bundet av potensialet klassisk sett, men kvantemekanisk kan den tunnelere ut. En første tilnærming til problemet vårt, er potensialet

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq x < x_1 \\ V_0 & \text{for} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{for} \quad x > x_2 \end{cases} , \tag{2}$$

hvor $V_0 > 0$. Skissér potensialet og skriv ned de generelle løsningene til den tidsuavhengige Schrödingerlikningen i de ulike områdene.

Potensialet som er introdusert her, vil bli referert til som **potensial 1**.

**c)** Vi begynner med å se på hva som skjer med de stasjonære tilstandene til en fri partikkel, som bølgepakken til $\alpha$-partikkelen er bygget opp av. Gitt potensialbarrieren definert i likn. (2), bruk grensebetingelsene for $\psi$ og $d\psi/dx$ til å finne (analytisk) at transmisjonskoeffisienten kan skrives som

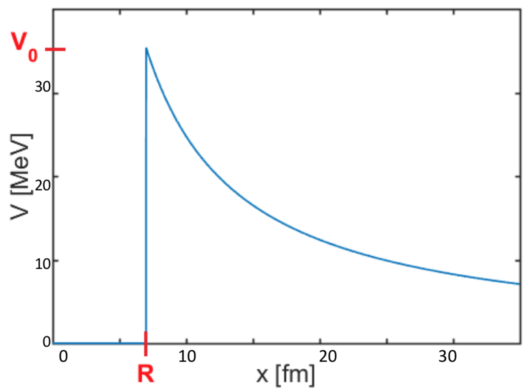
$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)}. \tag{3}$$

**d)** Plott $T$ som funksjon av $E$. Bruk høyde $V_0 = 34$ MeV, bredde $\Delta x = x_2 - x_1 = 17$ fm. Er $T(E)$ størrelsesmessig forenlig med den store relative forskjellen i halveringstid $T_{1/2}$ mellom $^{232}$Th og $^{218}$Th?

**e)** Hvilken transmisjonskoeffisient $T$ forventer du for $\alpha$-henfall av $^{226}$Ra utfra likn. (3)? Gi et grovt overslag over hvor mange ganger (i gjennomsnitt) $\alpha$-partikkelen må treffe barrieren før den kommer ut. Hvis $\alpha$-partikkelen har en hastighet på 0.073 c inne i kjernen, hvor lang tid ville det grovt sett ta før den slipper ut? Sammenlikn denne tiden med oppgitt $T_{1/2}$ for $^{226}$Ra.

**f)** I denne oppgaven skal vi bruke **potensial 1** til å studere tidsutviklingen til bølgepakken definert i likn. (1) numerisk.

La nå tiden begynne å gå, med initialtilstanden til bølgefunksjonen som definert av likn. (1). Gjør en numerisk simulering ved hjelp av Schrödingerlikningen og se hva som skjer dersom du starter $\alpha$-partikkelen i $x_0 = 5$ fm ved tiden $t = 0$. Hvordan oppfører bølgefunksjonen seg som funksjon av tid? Hva skjer når $\alpha$-partikkelen treffer potensialbarrieren? Her kan det være lurt å animere eller plotte ved forskjellige tidspunkter. Besvarelsen skal inneholde en kvalitativ beskrivelse av bølgefunksjonens tidsutvikling. Hvordan stemmer dette overens med hva du ville forvente for $\alpha$-henfall?




Figur 2: Potensial 2.

**Hint:** Bruk initialbølgefunksjonen definert i 2a) og potensialet fra 2b) samt tallverdier som i oppgave 2d). Husk at bølgefunksjonen er veldig liten på utsiden av potensialet (på høyresiden) og at du må finne en måte å visualisere denne delen av bølgefunksjonen. Vi er ute etter forståelsen og prinsipper. Det kan hende at du må redusere kraftig bredden på kassepotensialet for at koden din skal fungere. Videre er Schrödingerlikningen med spredning mot et bokspotensial nokså utfordrende å løse numerisk! Den vanlige Eulermetoden vil kanskje ikke virke. Vi anbefaler istedet å tenke på likningen som en egenverdilikning med matriser $(D + V)\psi = E\psi$. Matrisene $D$ og $V$ representerer henholdsvis den andrederiverte og potensialet. Pythonbiblioteket scipy.sparse.linalg inneholder effektive metoder for å løse slike egenverdilikninger.

**g)** Bokspotensialet vi har sett på så langt (potensial 1), er lite realistisk for å beskrive $\alpha$-henfall. Et kvalitativt mer realistisk potensial (**potensial 2**) er illustrert i Fig. 2 og er gitt ved

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 0 \leq x < R \\ \frac{Z_\alpha Z_D k_e}{x} & \text{for} \quad x \geq R. \end{cases} \tag{4}$$

Her er $Z_\alpha$ ladningen til $\alpha$-partikkelen, $Z_D$ ladningen til $^{222}$Rn og $k_e = 1.44$ eV nm er Coulomb-konstanten.

Hva er den kvalitative forskjellen mellom formen på potensialene? Hvorfor antas potensial 2 å være en bedre fysisk beskrivelse av systemet? Hvordan forventer du kvalitativt at transmisjonskoeffisienten $T$ for potensial 2 forløper/utvikler seg med energien $E$ i forhold til potensial 1? Hva skjer med bølgefunksjonen som funksjon av tid?