

Løsningsforslag
FYS2140 Hjemmeeksamen – Vår 2018

11. april 2018

Løsningsforslaget kan inneholde spesielle ting av interesse som vi ikke forventer besvart av studentene.

Oppgave 1 Partikkel-bølge dualitet

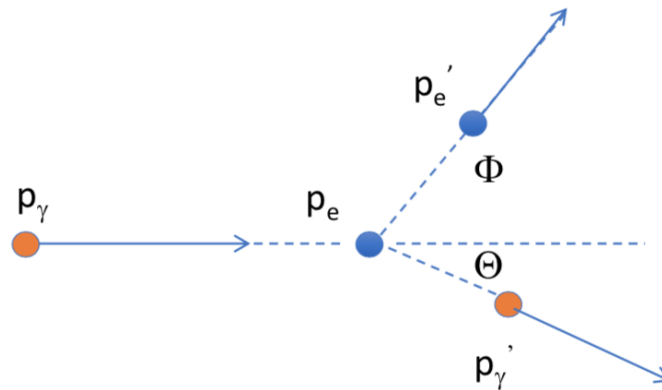
Fotoners partikkelnatur

- a1) Skriv opp Comptons formel. Tegn en prinsippskisse av fotonspredning. Forklar symbolene i formelen og skissen. Regn ut Compton-bølgelengden for elektroner.

Svar: Comptons formel er:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (1)$$

hvor Fig. 1 viser kinematikken: Et foton med bevegelsesmengde p (bølgelengden $\lambda = h/p$) kommer inn fra venstre og blir spredt mot et elektron som ligger i ro. Etter spredningen går fotonet ut med en bevegelsesmengde p' (bølgelengden $\lambda' = h/p'$) i en vinkel Θ i forhold til inngående foton. Tilsvarende blir elektronet tilført en bevegelsesmengde p'_e og får en vinkel Φ i forhold til inngående foton. Alle størrelser kan utledes som om fotonet er en partikkel som gjennomgår et elastisk støt med elektronet.



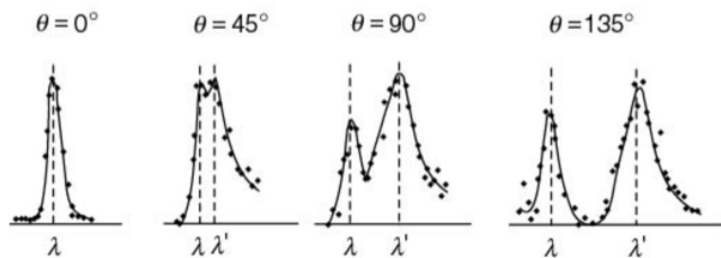
Figur 1: Prinsippskisse av fotonspredning i Comptons eksperiment.

Compton-bølgelengden for elektroner er $\lambda_C = h/m_e c = hc/m_e c^2 = 1240\text{eVnm}/511000\text{eV} = 0.00243 \text{ nm}$.

- a2) Arthur Holly Compton brukte røntgenstråling med bølglengde $\lambda = 0.0709$ nm. I hvilken vinkel (se Fig. 2) målte han $\lambda' = 0.0749$ nm?

Svar: Vi regner ut vinkelen fra Comptons formel:

$\theta = \arccos(1 - (\Delta\lambda/\lambda_C)) = \arccos(1 - (0.004/0.00243)) = 130^\circ$, som vi må anta tilsvarer vinkelen $\approx 135^\circ$ ettersom målenøyaktigheten i λ ikke muliggjør veldig nøyaktig bestemmelse av vinkelen.



Figur 2: Data fra Comptons eksperiment. Figuren viser antall fotoner som funksjon av bølglengde i forskjellige spredningsvinkler.

- a3) Hva skyldes den første toppen til venstre i spektrene? Hvorfor ble det ikke brukt synlig lys i dette eksperimentet?

Svar: Den første toppen tilsvarer at vi har spredning mot et elektron som er sterkt bundet til kjernen. Dermed skjer spredningen mot et 'uendelig' tungt elektron (dvs elektron + atomkjernen) og det blir ingen forskyvning i bølglengde. Toppen i det første spekteret målt i 0 grader, har en topp som er kombinasjon av 'uendelig' tungt elektron og spredning mot fritt elektron i 0 grader.

Synlig lys ville ikke gi nok forandring i bølglengden til det spredte fotonet til at $\Delta\lambda$ kunne observeres.

Nøytroners bølgenatur

- b1) Vi ønsker å studere bølgeegenskapene for termiske nøytroner i likevekt med omgivelsene ved temperatur 25°C . Nøytronenes gjennomsnittlige energi er gitt ved $\langle E \rangle = \frac{3}{2}k_B T$. Finn gjennomsnittlig energi, bevegelsesmengde og bølglengde for nøytronene¹.

Svar: Den midlere energi blir $\langle E \rangle = 1.5 \times 8.61 \times 10^{-5}(273 + 25)\text{eV} = 0.0385\text{eV}$, den midlere bevegelsesmengde blir $p = \sqrt{E2mc^2}/c =$

¹Dette skal gjøres enkelt, du slipper å ta hensyn til hvordan energifordelingen ser ut. Bruk fornuftige enheter.

$$\sqrt{0.0385 \times 2 \times 939.6 \times 10^6} \text{keV}/c = 8.508 \text{keV}/c \text{ og}$$

$$\lambda = hc/pc = 1240/8508 \text{nm} = 0.146 \text{ nm}.$$

- b2)** Vi bruker Braggdiffraksjon for å velge ut (filtrere) nøytroner med en bestemt bølgelengde. En avgrenset stråle av nøytronene sendes på skrå ned mot en NaCl-krystaloverflate. Krystallen har krystall-lag med avstand $d = 2.82 \text{ \AA}$ mellom hvert lag. I dette eksperimentet skal vi filtrere ut nøytroner med bølgelengde 1.85 \AA . For hvilken innkommende (og utgående) vinkel har disse nøytronene maksimal intensitet? Hvilket område i vinkler kreves for å filtrere ut bølgelengder med spredning mindre enn $|\Delta\lambda|/\lambda = 10\%$?

Svar: Vi løser likningen for Braggs lov

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (2)$$

med hensyn på θ , hvor vi setter $n = 1$ for det mest intense maksimum. Vi finner da maksimum for vinkelen $\theta = 19.1^\circ$. Tilsvarende finner vi vinkelområdet for 10% avvik til å bli $\theta = 17.2 - 21.2^\circ$.

Oppgave 2 Radioaktivt α -henfall

I denne oppgaven skal vi se på radioaktivt α -henfall ved hjelp av to ulike potensialer. Noen av oppgavene skal løses analytisk, mens andre vil være tilnærmet umulige å løse uten hjelp fra numeriske metoder. Det kan være lurt å studere nærmere kompendiet i programmering skrevet av Benedicte Emilie Brækken og Mari Røysheim (du finner det under ressurser på kursets hjemmeside). Finn selv fram til konstanter som ikke er oppgitt, men som du måtte trenge.

Atomkjernen for helium (${}^4\text{He}$ kalles ofte α -partikkel) er spesielt sterkt bundet. Den finnes derfor i rikelige mengder i universet og i vår egen sol. Det som kanskje ikke er så kjent, er at α -partikkelen kan eksistere lenge som en stabil partikkel inne i atomkjernen før den sendes ut. Denne type α -henfall finner vi ofte for tunge atomkjerner som uran og thorium.

Halveringstiden $T_{1/2}$ for α -henfall avhenger av hvor lett (eller vanskelig) α -partikkelen vil kunne trenge gjennom den såkalte Coulomb-barrieren. Ettersom denne barrieren stort sett er den samme for de tunge atomkjernene, så blir α -partikkelens energi en viktig parameter for beregning av $T_{1/2}$.

Den tilhørende tunnelingssannsynligheten kan variere med en faktor opptil 10^{20-25} mellom atomkjerner med samme antall protoner (isotoper). For eksempel finner vi for thorium-isotopene at ${}^{232}\text{Th}$ har $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$ år med $E_\alpha = 4.08 \text{ MeV}$, mens ${}^{218}\text{Th}$ har $T_{1/2} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ med $E_\alpha = 9.85 \text{ MeV}$.

Vi skal spesielt se på radium som henfaller til radon gjennom reaksjonen ${}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + \alpha$. Atomkjernen ${}^{226}\text{Ra}$ har en halveringstid på $T_{1/2} =$

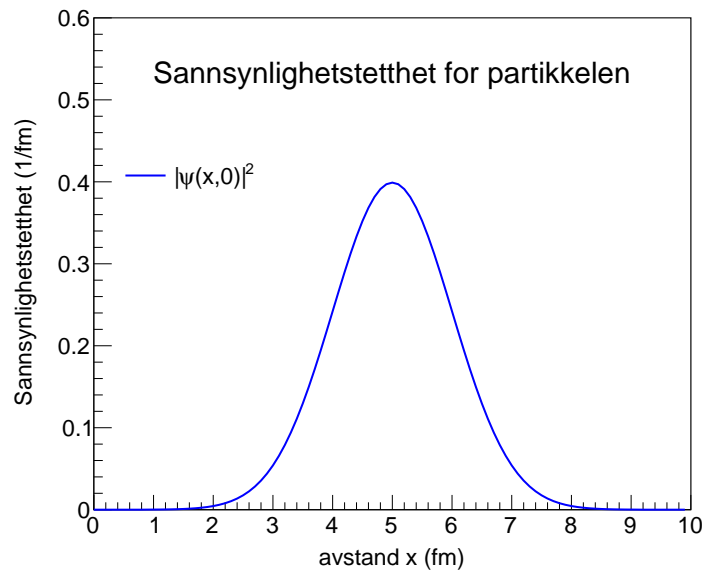
1600 år og sender ut en α -partikkel med energi $E_\alpha = 4.8$ MeV. Vi antar at radius til disse tunge kjernene er $R = 7.3$ fm.

Vi forenkler oppgaven ved at vi regner potensialet som en-dimensjonalt. Posisjonen x er dermed et uttrykk for α -partikkelens avstand fra atomkjernens senter. For energi og lengde, anbefaler vi å bruke henholdsvis enheter MeV og fm.

- a) Vi tilnærmer α -partikkelen ved en Gaussisk bølgepakke med bølgefunksjon

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-(x-x_0)^2/4a^2} e^{ikx} \quad (3)$$

ved tiden $t = 0$. Vis at normeringskonstanten blir $A = (1/2\pi a^2)^{1/4}$, og plott $|\Psi(x, 0)|^2$ som funksjon av posisjonen. Husk enheter på aksene. Velg konstantene $x_0 = 5$ fm, $a = 1$ fm og $k = 1.38$ fm $^{-1}$. Hvilken energi har α -partikkelen?



Figur 3: Sannsynlighetstettheten til α -partikkelen som funksjon av posisjon x . Vi har brukt $x_0 = 5$ fm og $a = 1$ fm.

Svar: Normeringskonstanten A finnes ved å forlange

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1. \quad (4)$$

Integralet gir:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx \\
&= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2a} dy \\
&= |A|^2 \sqrt{2\pi} a, \tag{5}
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt $y = (x - x_0)/\sqrt{2}a$.

Normeringsbetingelsen gir dermed $A = (1/2\pi a^2)^{1/4}$. Figur 3 viser sannsynlighetsfordelingen av partikkelen ved tid $t = 0$.

Dersom partikkelen ikke var definert i posisjon, ville vi ha energi $E_\alpha = (\hbar k)^2/2m = (\hbar c)^2 k^2/2mc^2 = 9.9 \text{ MeV}$. Imidlertid er partikkelen lokalisert rundt x_0 , og vi må regne ut:

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, 0) \hat{p}^2 \Psi(x, 0) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, 0) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, 0) dx \\
&= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, 0) \left(-\frac{1}{2a^2} + \left(-\frac{(x-x_0)}{2a^2} + ik \right)^2 \right) \Psi(x, 0) dx \\
&= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, 0) \left(\frac{(x-x_0)^2}{4a^4} - k^2 - \frac{1}{2a^2} \right) \Psi(x, 0) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{4a^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 \left(\frac{1}{2\pi a^2} \right)^{1/2} e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx + \hbar^2 \left(k^2 + \frac{1}{2a^2} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2a^4} \left(\frac{1}{2\pi a^2} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2/2a^2} dy + \hbar^2 \left(k^2 + \frac{1}{2a^2} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2a^4} \left(\frac{1}{2\pi a^2} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} \right)^{-3/2} \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) + \hbar^2 \left(k^2 + \frac{1}{2a^2} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{4a^2} + \hbar^2 \left(k^2 + \frac{1}{2a^2} \right) = \hbar^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4a^2}, \tag{6}
\end{aligned}$$

hvor vi igjen har brukt at integrander av typen $(x-x_0)|\Psi(x, 0)|^2$ er antisymmetriske om x_0 og substitusjonen $y = x - x_0$. Dette gir en forventningsverdi for energien på

$$\langle E_\alpha \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k^2 + 1/4a^2 \right) = 11.3 \text{ MeV}. \tag{7}$$

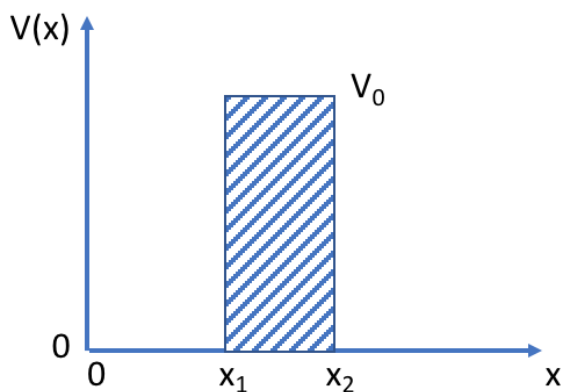
- b) Vi skal beskrive α -partikkelen som fanget i kjernen ved hjelp av en potensialbarriere med høyde V_0 . Det vi skal studere er spredningstilstander der partikkelen har energi $0 < E < V_0$. Partikkelen er bundet

av potensialet klassisk sett, men kvantemekanisk kan den tunnelere ut. En første tilnærming til problemet vårt, er potensialet

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x < x_1 \\ V_0 & \text{for } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{for } x > x_2 \end{cases}, \quad (8)$$

hvor $V_0 > 0$. Skissér potensialet og skriv ned de generelle løsningene til den tidsuavhengige Schrödingerlikningen i de ulike områdene.

Svar:



Figur 4: Skisse av potensialet i (8).

De generelle løsningene til TUSL deles opp i tre områder i henhold til Fig. 4. TUSL for $0 \leq x < x_1$:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x), \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (9)$$

har løsning

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (10)$$

TUSL for $x > x_2$:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x), \quad (11)$$

med løsning

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. \quad (12)$$

TUSL for $x_1 \leq x \leq x_2$:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) = \kappa^2\psi(x), \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad (13)$$

med løsning

$$\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}. \quad (14)$$

Siden vi antar at $0 < V_0 < E$, er k og κ reelle positive tall. For å vise at $\psi(x)$ som gitt over er løsninger kan man sette inn i TUSL, men for å få full score på denne oppgaven er det tilstrekkelig å referere til at vi har løst disse differensialligningene før. Man bør også kommentere at dette er de generelle løsningene, da de består av to lineært uavhengige funksjoner.

- c) Vi begynner med å se på hva som skjer med de stasjonære tilstandene til en fri partikkel, som bølgepakken til α -partikkelen er bygget opp av. Gitt potensialbarrieren definert i likn. (8), bruk grensebetingelsene for ψ og $d\psi/dx$ til å finne (analytisk) at transmisjonskoeffisienten kan skrives som

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\right)}, \quad (15)$$

hvor $\Delta x = x_2 - x_1$.

Svar: Transmisjonskoeffisienten er definert som

$$T \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2}. \quad (16)$$

Kontinuiteten til ψ og ψ' i $x = x_1$ og $x = x_2$ gir følgende grensebetingelser:

$$Ae^{ikx_1} + Be^{-ikx_1} = Ce^{\kappa x_1} + De^{-\kappa x_1} \quad (17)$$

$$ikAe^{ikx_1} - ikBe^{-ikx_1} = \kappa Ce^{\kappa x_1} - \kappa De^{-\kappa x_1} \quad (18)$$

$$Fe^{ikx_2} + Ge^{-ikx_2} = Ce^{\kappa x_2} + De^{-\kappa x_2} \quad (19)$$

$$ikFe^{ikx_2} - ikGe^{-ikx_2} = \kappa Ce^{\kappa x_2} - \kappa De^{-\kappa x_2} \quad (20)$$

Vi setter i det følgende $G = 0$ da den innkommende bølgen kommer fra venstre (kjernen). For å finne T må vi da løse for den innkommende amplituden A uttrykt ved transmisjonsamplituden F . Vi begynner med å ta ik(17)+(18):

$$A = \frac{1}{2ik} e^{-ikx_1} [(ik + \kappa)Ce^{\kappa x_1} + (ik - \kappa)De^{-\kappa x_1}]. \quad (21)$$

Deretter finner vi C og D uttrykt ved F ved å ta kombinasjonene $\kappa(19)+(20)$ og $\kappa(19)-(20)$:

$$C = \frac{1}{2\kappa}(ik + \kappa)Fe^{ikx_2}e^{-\kappa x_2} \quad (22)$$

$$D = \frac{1}{2\kappa}(-ik + \kappa)Fe^{ikx_2}e^{\kappa x_2}, \quad (23)$$

som innsatt i (21) gir

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4ik\kappa}e^{ik(x_2-x_1)} \left[(ik + \kappa)^2 e^{-\kappa(x_2-x_1)} - (ik - \kappa)^2 e^{\kappa(x_2-x_1)} \right] F \\ &= \frac{e^{ik\Delta x}}{4ik\kappa} \left[(-k^2 + 2ik\kappa + \kappa^2)e^{-\kappa\Delta x} - (-k^2 - 2ik\kappa + \kappa^2)e^{\kappa\Delta x} \right] F \\ &= \frac{e^{ik\Delta x}}{4ik\kappa} \left[(k^2 - \kappa^2)(e^{\kappa\Delta x} - e^{-\kappa\Delta x}) + 2ik\kappa(e^{\kappa\Delta x} + e^{-\kappa\Delta x}) \right] F \\ &= \frac{e^{ik\Delta x}}{2ik\kappa} \left[(k^2 - \kappa^2) \sinh(\kappa\Delta x) + 2ik\kappa \cosh(\kappa\Delta x) \right] F \\ &= e^{ik\Delta x} \left[\frac{(k^2 - \kappa^2)}{2ik\kappa} \sinh(\kappa\Delta x) + \cosh(\kappa\Delta x) \right] F, \end{aligned} \quad (24)$$

hvor vi har satt $\Delta x = x_2 - x_1$ og brukt fra Rottmann at

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{og} \quad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (25)$$

Dette gir

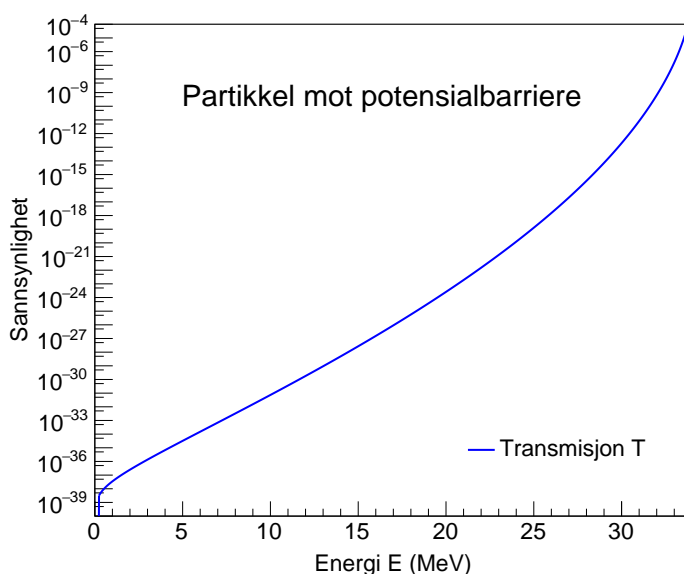
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\frac{(k^2 - \kappa^2)^2}{4k^2\kappa^2} \sinh^2(\kappa\Delta x) + \cosh^2(\kappa\Delta x)} \\ &= \frac{1}{\frac{(k^2 - \kappa^2)^2}{4k^2\kappa^2} \sinh^2(\kappa\Delta x) + 1 + \sinh^2(\kappa\Delta x)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(k^2 - \kappa^2)^2 + 4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2} \sinh^2(\kappa\Delta x)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(k^2 + \kappa^2)^2}{4k^2\kappa^2} \sinh^2(\kappa\Delta x)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\Delta x \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\right)}, \end{aligned} \quad (26)$$

hvor vi har brukt at

$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \quad k^2\kappa^2 = \frac{4m^2E(V_0 - E)}{\hbar^4}. \quad (27)$$

- d) Plott T som funksjon av E . Bruk høyde $V_0 = 34$ MeV, bredde $\Delta x = x_2 - x_1 = 17$ fm. Er $T(E)$ størrelsesmessig forenlig med den store relative forskjellen i halveringstid $T_{1/2}$ mellom ^{232}Th og ^{218}Th ?

Svar: Vi har plottet transmisjonskoeffisienten i Fig. 5. Den relative endring i T når vi går fra $E_\alpha = 4.08$ MeV til $E_\alpha = 9.85$ MeV er i området $\approx 10^4$, altså langt mindre enn den relative forskjell mellom ^{232}Th og ^{218}Th . Det betyr at dette er en dårlig modell og/eller parametrene for barrieren er urealistiske.



Figur 5: Transmisjonskoeffisienten (15) som funksjon av energien E til α -partikkelen. Vi har brukt $V_0 = 34$ MeV, $\Delta x \equiv x_2 - x_1 = 17$ fm og hvileenergien til α -partikkelen $mc^2 = 3726$ MeV.

- e) Hvilken transmisjonskoeffisient T forventer du for α -henfall av ^{226}Ra utfra likn. (15)? Gi et grovt overslag over hvor mange ganger (i gjennomsnitt) α -partikkelen må treffe barrieren før den kommer ut. Hvis α -partikkelen har en hastighet på $0.073 c$ inne i kjernen, hvor lang tid ville det grovt sett ta før den slipper ut? Sammenlikn denne tiden med oppgitt $T_{1/2}$ for ^{226}Ra .

Svar: Vi finner at $T(4.8\text{MeV}) = 2.3 \times 10^{-35}$. Partikkelen må oppsøke barrieren i gjennomsnitt 4.3×10^{34} ganger før den slipper ut. Hver gang partikkelen har reist $2R$ (= diameteren av kjernen) så treffes

barrieren. Tiden dette tar er $t = 2R/0.073c = 6.7 \times 10^{-22}$ s. Totaltiden blir 4.3×10^{34} ganger 6.7×10^{-22} s, som gir 900.000 år. Sammenliknet med $T_{1/2} = 1600$ år for ^{226}Ra , er dette 600 ganger lenger tid. Dersom man heller setter $V_0 \approx 29.5$ MeV, får vi mer realistiske levetider.

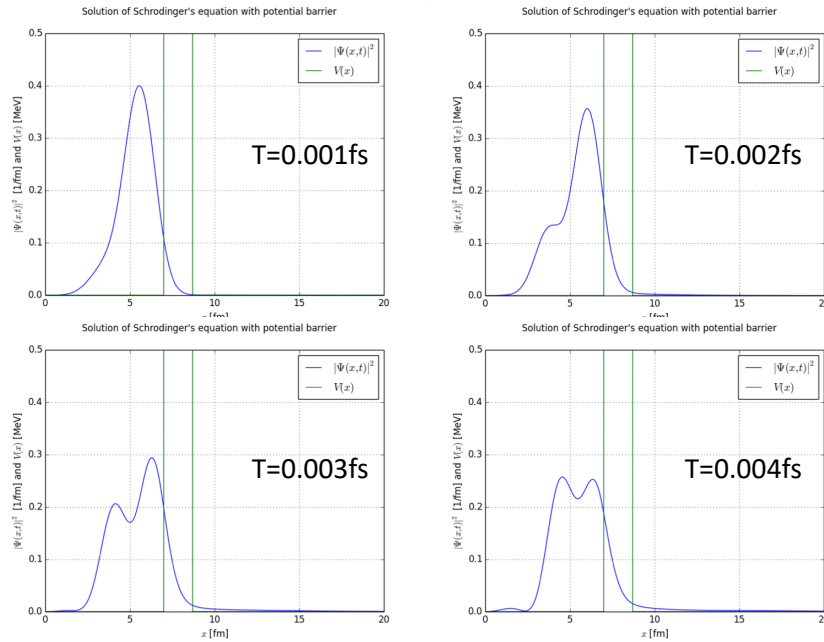
- f) I denne oppgaven skal vi bruke **potensial 1** til å studere tidsutviklingen til bølgepakken definert i likn. (3) numerisk.

La nå tiden begynne å gå, med initialtilstanden til bølgefunksjonen som definert av likn. (3). Gjør en numerisk simulering ved hjelp av Schrödingerlikningen og se hva som skjer dersom du starter α -partikkelen i $x_0 = 5$ fm ved tiden $t = 0$. Hvordan oppfører bølgefunksjonen seg som funksjon av tid? Hva skjer når α -partikkelen treffer potensialbarrieren? Her kan det være lurt å animere eller plote ved forskjellige tidspunkter. Besvarelsen skal inneholde en kvalitativ beskrivelse av bølgefunksjonens tidsutvikling. Hvordan stemmer dette overens med hva du ville forvente for α -henfall?

Hint: Bruk initialbølgefunksjonen definert i 2a) og potensialet fra 2b) samt tallverdier som i oppgave 2d). Husk at bølgefunksjonen er veldig liten på utsiden av potensialet (på høyresiden) og at du må finne en måte å visualisere denne delen av bølgefunksjonen. Vi er ute etter forståelsen og prinsipper. Det kan hende at du må redusere kraftig bredden på kassepotensialet for at koden din skal fungere. Videre er Schrödingerlikningen med spredning mot et bokspotensial nokså utfordrende å løse numerisk! Den vanlige Eulermetoden vil kanskje ikke virke. Vi anbefaler istedet å tenke på likningen som en egenverdilikning med matriser $(D + V)\psi = E\psi$. Matrisene D og V representerer henholdsvis den andrederiverte og potensialet. Pythonbiblioteket `scipy.sparse.linalg` inneholder effektive metoder for å løse slike egenverdilikninger.

Svar: Siden potensialbarrieren er så stor, har vi valgt å illustrere hva som skjer når vi bare bruker 10% av høyden og 10% av bredden på potensialet ($V_0 = 3.4$ MeV og $\Delta x = 1.7$ fm). Dermed kan man lettere se sannsynlighetstettheten som funksjon av tid. Vi har brukt pythonbiblioteket `scipy.sparse.linalg` og skrevet alt i enheter av MeV, fs og fm.

Figur 6 viser tilstanden ved fire tidspunkter. Kort tid etter starten, ved $t = 0.001$ fs, er sannsynlighetstetthetskurven ganske lik den opprinnelige kurven plottet i Fig. 3. Allerede ved $t = 0.002$ fs observerer vi sannsynligheten for reflektert partikkel som en venstre-skulder på den opprinnelige fordelingen. Den reflekterte kurven stiger videre i intensitet og er omtrent like stor som den initielle kurven ved $t = 0.004$ fs. Inne i barrieren har vi en eksponentialt avtagende kurve som funksjon av avstanden x . Til høyere for barrieren (grønn strek) ser vi hvordan en



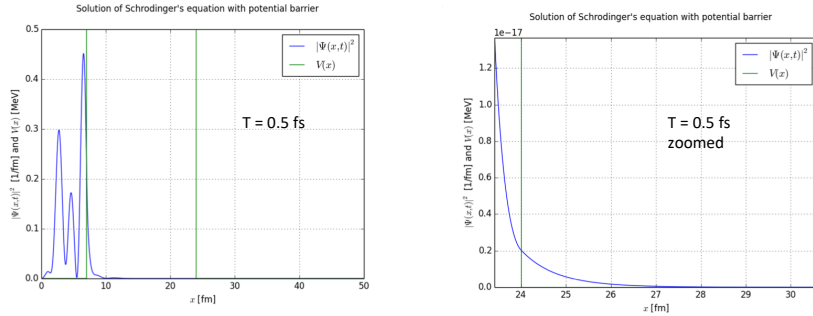
Figur 6: Animering av α -decay. Vi har brukt en redusert barriere ($V_0 = 3.4$ MeV og $\Delta x = 1.7$ fm) for at vi skal kunne visualisere tegn til tunnelering. Simuleringene ble gjennomført med tidssteg $dt = 5 \times 10^{-5}$ fs.

liten del av partikkelen har tunnelert gjennom barrieren. Simuleringen demonstrerer i prinsippet α -decay: α -partikkel reflekteres hovedsaklig av barrieren mens en forsvinnende liten del trenger gjennom barrieren og dermed tunnelerer.

Denne simuleringen viser forholdene etter en så kort tid at partikkelen bare møter barrieren en gang. Lar vi tiden gå videre $t > 0.004$ fs, vil vi stå overfor følgende problem: Siden potensialet ikke er definert for negative x -verdier, vil bølgepakken reflekteres fram og tilbake mellom $x = 0$ og $x = R$. Partikkelen vil da forsøke mange ganger å trenge gjennom barrieren, og vil så tilslutt totalt tunnelere. Figur 7 viser forholdene etter en tid $t = 0.5$ fs.

- g) Bokspotensialet vi har sett på så langt (potensial 1), er lite realistisk for å beskrive α -henfall. Et kvalitativt mer realistisk potensial (**potensial 2**) er illustrert i Fig. 8 og er gitt ved

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x < R \\ \frac{Z_\alpha Z_D k_e}{x} & \text{for } x \geq R. \end{cases} \quad (28)$$



Figur 7: Simulering av α -decay med barriereparametre $V_0 = 34$ MeV og $\Delta x = 17$ fm etter en tid $t = 0.5$ fs. I figuren til venstre synes bølgefunksjonen så vidt å ha trent inn i potensialbarrieren. Figuren til høyre er zoomed kraftig inn i y-retning (1.3×10^{-17}) og viser tunneling gjennom barrieren. Simuleringen ble gjennomført med tidssteg $dt = 5 \times 10^{-5}$ fs.

Her er Z_α ladningen til α -partikkelen, Z_D ladningen til ^{222}Rn og $k_e = 1.44$ eV nm er Coulomb-konstanten.

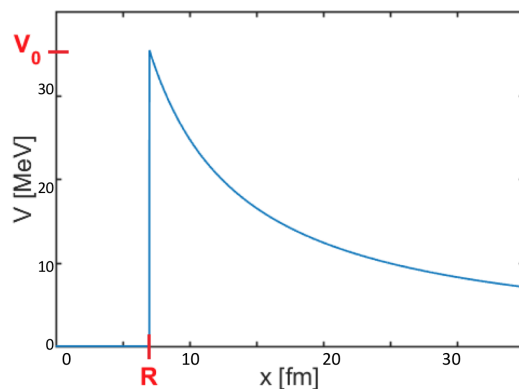
Hva er den kvalitative forskjellen mellom formen på potensialene? Hvorfor antas potensial 2 å være en bedre fysisk beskrivelse av systemet? Hvordan forventer du kvalitativt at transmisjonskoeffisienten T for potensial 2 forløper/utvikler seg med energien E i forhold til potensial 1? Hva skjer med bølgefunksjonen som funksjon av tid?

Svar: Kassepotensialet (potensial 1) er like bredt for alle energier $E < V_0$ mens potensial 2 blir fort 'tynnere' og tynnere' for høyere E . Det vi si at bredden på barrieren avtar med økende E .

Potensial 2 er fysikalsk mer realistisk fordi det frastøtende Coulomb potensialet mellom α -partikkelen og kjernen er bygget inn i barrierens høyere side.

Transmisjonskoeffisienten T øker dramatisk med mindre potensialhøyde og/eller mindre potensialbredde. Dette betyr at $T(E)$ for potensial 2 vil øke raskere som funksjon av E enn tilfellet er for potensial 1. Dette vil gjøre at transmisjonen vil spenne over enda flere dekaner og kanskje bli forenlig med de eksperimentelle variasjonene vi kjenner for isotop-rekkene til de tunge kjernene.

Tidsutviklingen av bølgefunksjonen vil se annerledes ut for potensial 2: Den kinetiske energi av bølgepakken vil øke gradvis for store x i henhold til $E_{\text{kin}} = E - V(x)$. Også formen på den tilnærmede eksponentiale



Figur 8: Potensial 2.

avtagende amplitude inne i barrieren ($\approx e^{-\kappa x}$) vil ha en avvikende form.

Det kan bemerkes at vi er et godt stykke vekk fra et realistisk potensial. Problemet må behandles 3-dimensjonalt, og det er ikke tatt hensyn til at den sterke kjernekräften gir flere 10-MeV'er dypere potensial mellom radius $r = 0$ og $r = R$.