FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2019
Hjemmeeksamen
(Versjon 21. mars 2019)

Viktig info:

- Elektronisk innlevering via **Inspera** med frist mandag 1. april 2019 kl. 11:59 på formiddagen. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, ikke vanlig foto med mobiltelefon. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i regningene.
- Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skal skje anonymt via Inspera.
- Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å gå opp til endelig eksamen.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder gjerne relevante plott og programkode i pdf-filen.
- Inspera tar bare ett dokument. Det er defor viktig at alt matriale lastes opp **i én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en.
- Lykke til!

Oppgave 1 Elektron-foton kollisjoner

a) Forklar kort hvordan Compton-spredning i 1923 viste at elektromagnetisk stråling, i visse tilfeller, kan betraktes som partikler (fotoner).

b) Allerede i 1905 forklarte Einstein fotoelektrisk effekt ved å foreslå at elektromagnetisk stråling kunne ses på som fotoner ('lyskvanter'). Svar med ett par setninger på hvilken måte Compton-spredning brakte partikkelforståelsen av lys et hakk videre?

c) Vis at et fritt elektron ikke kan absorbere fotonets fulle energi. Hvorfor snakker vi da likevel om fotoelektrisk effekt i kompendiet (og læreboka)?

Oppgave 2 Bohr og Rydberg

a) Forklar hvordan linjespektre fra lysende gasser gav sterk støtte til en kvanteteori for atomer. Hvorfor kalles linjespektre stoffers 'fingeravtrykk'?

b) Generalisér Bohrs atommodell til andre atomer enn hydrogen, men med bare ett elektron utenfor kjernen. Det er tilstrekkelig at du skriver opp uttrykket for elektronets kvantiserte energi og radius for slike systemer.

c) Hvilken energi og radius har elektronet hvis det befinner seg i den første eksiterte tilstanden i dobbelt-ionisert[1] litium (protontall $Z = 3$)?

d) Balmers formel kunne beskrive bølgelengdene til overganger i hydrogenatomet. Vis at Balmers formel er et spesialtilfelle av Rydbergs formel for hydrogen.

e) Generelt for elektromagnetisk stråling, f.eks fra solen, hvilke bølgelengder faller i den synlige delen av spekteret og hva tilsvarer disse i energi?

f) Angi minst 3 spektrallinjer fra enkelt-ionisert helium som gir synlig lys.

[1] To elektroner er fjernet fra atomet.

Oppgave 3 Partikkel i boks

Denne oppgaven omhandler en partikkel med masse m som befinner seg i en uendelig potensialbrønn:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

a) Tegn eller plott potensialet. Skriv opp de ortonormerte tidsuavhengige bølgefunksjonene ψ_n, energiegenverdiene E_n og de tilhørende bølgetallene k_n for de stasjonære tilstandene (du finner de i læreboka). Bestem gjennom argumenter (uten å regne) forventningsverdien av partikkelens posisjon i de forskjellige stasjonære tilstandene.

b) Vi vil i oppgave 4c) bruke funksjonen $\sin^5\theta$. Vi antar:

$$16\sin^5\theta = \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta. \tag{2}$$

Sannsynliggjør likningen ved å plotte venstre (VS) og høyre side (HS) av likningen for vinkler θ i området $0 - 2\pi$ og vis at de overlapper[2].

c) Vi preparerer initielt partikkelen i brønnen i en tilstand:

$$\Psi(x,0) = A\sin^5(\pi x/a). \tag{3}$$

Uttrykk $\Psi(x,0)$ ved hjelp av de stasjonære tilstandene ψ_n i oppgave 3a) og normér bølgefunksjonen slik at $|\Psi(x,0)|^2 = 1$. Hint: Bruk Likn. (2) og at ψ_n er ortonormerte.

d) Er $\Psi(x,0)$ en egentilstand for $\hat{H}$? Begrunn svaret.

e) Skriv opp den tidsavhengige bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$.

f) Begrunn (uten å regne) at integraler slik som $\int_0^a x\psi_1\psi_3 dx$, $\int_0^a x\psi_1\psi_5 dx$ og $\int_0^a x\psi_3\psi_5 dx$ er lik null når det integreres mellom 0 og a. Bruk de antatte verdiene $\langle x\rangle_n$ fra oppgave 3a) og finn $\langle x\rangle$ i tilstanden $\Psi(x,t)$.

g) Hva blir resultatet av én energimåling på systemet (du trenger ikke regne ut energien)?

h) Hva er forventningsverdien av energien til partikkelen ved tiden t?

i) Beregn $\Psi(x,t)$ numerisk med $a = 1$ nm og $m = 0.511$ MeV/c^2. Plott reell og imaginær komponent av $\Psi(x,t)$, samt sannsynlighetstettheten ved tidspunktetene $t = 0.7$ fm og $t = 1.4$ fm.

[2] Du må gjerne bevise likningen matematisk, men det er tre grunner til å la være: (*i*) det er et fryktelig pes, (*ii*) du kommer til å svette og (*iii*) du får ikke ekstra uttelling for strevet.

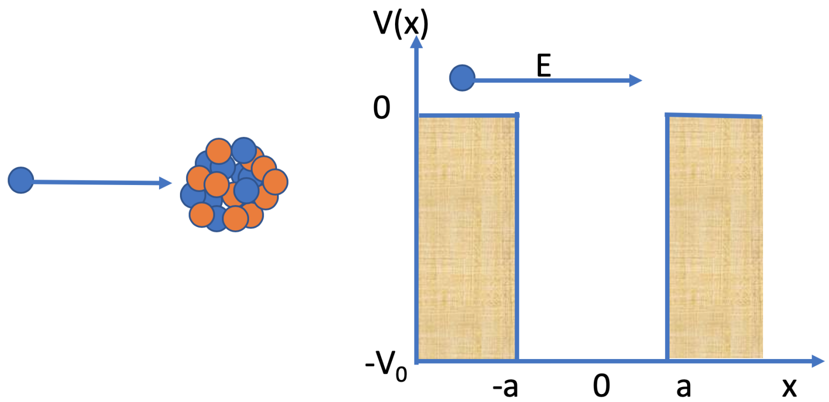
Oppgave 4 Nøytroninnfangning

Kjernekraft representerer et betydelig bidrag til elektrisitetproduksjonen i verden. Energien blir produsert ved at for eksempel uranisotopen ^{235}U spaltes (fisjonerer) i to tunge fragmenter, typisk med atommasser $A \approx 95$ og $A \approx 140$. Coulombkraften mellom de positivt ladde fragmentene gjør at de kommer opp i høye hastigheter. I neste omgang bremses de ned i vann og tilfører vannet energi på ≈ 200 MeV for hver fisjon.

I fisjonsprosessen blir det frigjort $2-3$ nøytroner som igjen kan trenge inn i en annen ^{235}U kjerne for så å gi en ny fisjon. For å holde prosessen i gang, må det være en nøyaktig balanse mellom nøytronfluksen i kjernereaktoren og hvor lett nøytronet kan bli fanget opp av en ny ^{235}U kjerne.

Vi skal her lage en veldig naiv modell for nøytroninnfangning ved bruk av endelig-brønn potensialet. Du trenger her å stjele stoff fra Kap. 2.6 i læreboka (bruk samme symboler og uttrykk).

Figur 1 illustrerer nøytronet som kommer inn fra venstre mot atomkjernen. Diameteren på kjernen tenker vi oss lik $2a$. Potensialet er $V = 0$ utenfor brønnen og $V = -V_0 < 0$ inne i brønnen.



Figur 1: Spredningspotensialet som nøytronet opplever.

a) Sett opp de formelle uttrykkene for bølgefunksjonene i de tre områdene med symboler fra læreboka (A, B, C, D, F, k og l). Får vi spredningstiltander eller bundne tilstander inne i brønnen? Begrunn svaret.

b) Vi antar at den innkommende bølgen Ae^{ikx} har amplityde $A = 1$. Læreboka gir et uttrykk for F ved hjelp av A. Videre er B uttrykt ved F. Vis at de resterende amplityder C og D kan uttrykkes som:

$$C = \left[\sin(la) + i\frac{k}{l}\cos(la)\right] e^{ika} F \tag{4}$$

$$D = \left[\cos(la) - i\frac{k}{l}\sin(la)\right] e^{ika} F. \tag{5}$$

c) Finn i litteraturen (eller på annen måte) typisk radius R til ^{235}U i fm og hvileenergien til nøytronet i MeV.

d) Lag et program (i ditt favoritt-språk, f.eks. `python`) der du viser reell og imaginær del av bølgefunksjonen samt sannsynlighetstettheten mellom -30 og 30 fm. Potensialets dybde settes til $V_0 = 10$ MeV. Plott tilfellene med inngående nøytronenergi $E_n = 0.5$ og 3 MeV. Hvilken nøytronenergi gir høyest sannsynlighet for at nøytronet befinner seg inne i kjernen?

e) Det viser seg at vår modell beskriver dårlig den eksperimentelle nøytroninnfangningen i atomkjernen. Antyd kort mulige forbedringer av modellen.