

FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2019

Hjemmeeksamen

(Versjon 3. april 2019)

Viktig info:

- Elektronisk innlevering via **Inspira** med frist mandag 1. april 2019 kl. 11:59 på formiddagen. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, ikke vanlig foto med mobiltelefon. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i regningene.
- Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skal skje anonymt via Inspira.
- Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å gå opp til endelig eksamen.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder gjerne relevante plott og programkode i pdf-filen.
- Inspira tar bare ett dokument. Det er derfor viktig at alt materiale lastes opp i **én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en.
- Lykke til!

Oppgave 1 Elektron-foton kollisjoner

- a) Forklar kort hvordan Compton-spredning i 1923 viste at elektromagnetisk stråling, i visse tilfeller, kan betraktes som partikler (fotoner).

Svar: Resultatet av Comptons eksperiment kunne beskrives ved at et foton opplever et klassisk støt med elektronet hvor energi og bevegelsesmengde er bevart. Kinematikken beskrives ved at fotonet tillegges bevegelsesmengde $p = h/\lambda$ og energi $E = h\nu$ der λ er lysets bølgelengde og ν er dets frekvens.

- b) Allerede i 1905 forklarte Einstein fotoelektrisk effekt ved å foreslå at elektromagnetisk stråling kunne ses på som fotoner ('lyskvanter'). Svar med ett par setninger på hvilken måte Compton-spredning brakte partikkelforståelsen av lys et hakk videre?

Svar: Compton-spredning demonstrerte at elektromagnetisk stråling ikke bare kommer i diskrete energipakker, men også at det har partikkelens egenskapen bevegelsesmengde som er bevart i støtprosesser.

- c) Vis at et fritt elektron ikke kan absorbere fotonets fulle energi. Hvorfor snakker vi da likevel om fotoelektrisk effekt i kompendiet (og læreboka)?

Svar: La oss anta at hele fotonens bevegelsesmengde p_γ overføres til elektronet, slik at $p_e = p_\gamma$. Anta videre at totalenergien før og etter reaksjonen er den samme, det vil si at summen av fotonets energi ($p_\gamma c$) og elektronets hvilemasse (mc_e^2) skal bli lik elektronets totale energi etter reaksjonen ($\sqrt{p_e^2 c^2 + (mc_e^2)^2}$). Dermed får vi likningen:

$$p_\gamma c + mc_e^2 = \sqrt{p_\gamma^2 c^2 + (mc_e^2)^2}, \quad (1)$$

som bare er tilfredstilt hvis elektronet er masseløst ($m_e = 0$), hvilket det ikke er. Altså bryter antagelsene mot bevegelsesmengde- og energi-bevaring.

Fotoelektrisk effekt skjer når elektronet er bundet til en tredje partikkel (for eksempel atomet) som sørger for at bevaringslovene oppfylles.

Oppgave 2 Bohr og Rydberg

- a) Forklar hvordan linjespektre fra lysende gasser gav sterk støtte til en kvanteteori for atomer. Hvorfor kalles linjespektre stoffers 'fingeravtrykk'?

Svar: Linjespektre fra lysende gasser tilsier at lys blir sendt ut pga elektronoverganger mellom diskrete energinivåer heller enn fra vibrerende eller akselererte ladninger. Det å innføre diskrete, kvantiserte energinivåer i atomet var å gi avkall på klassisk fysikk på atomært nivå til fordel for kvantefysikk. Linjespektrene ga sterk støtte til denne teorien, siden det forklarte *a)* at bare bestemte energier/frekvenser ble sendt ut som lys fra et gitt stoff og *b)* at et stoff alltid sendte ut de samme energiene/frekvensene i samsvar med energinivåene i stoffets atomer. Det betyr også at linjespektrene er unike for et stoff og derfor kan brukes som 'fingeravtrykk'.

- b) Generaliser Bohrs atommodell til andre atomer enn hydrogen, men med bare ett elektron utenfor kjernen. Det er tilstrekkelig at du skriver opp uttrykket for elektronets kvantiserte energi og radius for slike systemer.

Svar: Kraften mellom en ladning q_1 og q_2 er $F = k_e q_1 q_2 / r^2$ der $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$. For et atom med ett elektron ($q_1 = e$) utenfor en atomkjerne med Z protoner ($q_2 = Ze$), blir kraften $F_Z = k_e Z e^2 / r^2$. Dermed kan vi generalisere Bohrs formler for atomer med protontall Z og med bare ett elektron, ved å bytte ut $e^2 \rightarrow Ze^2$. Energinivåene er således gitt ved

$$E_n = -\frac{k_e^2 m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2}, \quad (2)$$

og radiusene gitt ved

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e k_e Z e^2} n^2 = a_0 \frac{n^2}{Z}. \quad (3)$$

Her er $n = 1, 2, 3, \dots$, a_0 er Bohr-radien og m_e er elektronmassen.

- c) Hvilken energi og radius har elektronet hvis det befinner seg i den første eksiterte tilstanden i dobbelt-ionisert¹ litium (protontall $Z = 3$)?

Svar: Energien er $E_2 = -30.6$ eV og radiusen er $r_2 = 4a_0/3 = 0.0706$ nm.

- d) Balmers formel kunne beskrive bølglengdene til overganger i hydrogenatomet. Vis at Balmers formel er et spesialtilfelle av Rydbergs formel for hydrogen.

Svar:

Balmers formel:

$$\lambda = 364.56 \text{ nm} \frac{n^2}{n^2 - 4}, n = 3, 4, 5, \dots \quad (4)$$

¹To elektroner er fjernet fra atomet.

Rydbergs formel:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), n_f = 1, 2, 3, \dots, n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots, \quad (5)$$

der $R_H = 1.0967757 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Påstand: Balmers formel er et spesialtilfelle av Rydbergs formel hvis det er overganger mellom n_i og $n_f = 2$. Balmer-serien representerer altså overganger ned til første eksiterte tilstand (som har $n = 2$) i hydrogenatomet. Indeksen n i Balmers formel tilsvarer da n_i med $n = 3, 4, 5, \dots$. Rydberg snudd på hodet gir da:

$$\lambda = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{4}{R_H} \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) = 364.71 \text{ nm} \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right), \quad (6)$$

som for datidens nøyaktighet (1885), tilsvarer Balmers formel. QED.

- e) Generelt for elektromagnetisk stråling, f.eks fra solen, hvilke bølgelengder faller i den synlige delen av spekteret og hva tilsvarer disse i energi?

Svar: Man regner med at det synlige lys har bølgelengder i området² $\lambda = 400\text{--}700 \text{ nm}$. Fotonets energi er gitt ved $E_\gamma = hc/\lambda = 1240 \text{ nm eV}/\lambda$. Dette gir energier i området $E_\gamma = 1.8\text{--}3.1 \text{ eV}$.

- f) Angi minst 3 spektrallinjer fra enkelt-ionisert helium som gir synlig lys.

Svar: For enkeltionisert helium kan vi bruke Likn. (2) med $Z = 2$. Dette gir energier som er fire ganger så store som for hydrogen. Siden $E = hc/\lambda$, betyr dette bølgelengder på 1/4 av de tilsvarende for hydrogen. Ingen av de overganger som tilsvarer Balmer serien er da lenger synlige, men bølgelengder fra Paschen serien blir synlige. Vi benytter i det følgende notasjonen ($n_i \rightarrow n_f$) for å beskrive overganger mellom begynnelses- (i) og slutttilstander (f).

Paschen serien gir to synlige linjer på 320.5 nm ($5 \rightarrow 3$) (synlig?) og 468.9 nm ($4 \rightarrow 3$). Neste serie gir: 656.5 nm ($6 \rightarrow 4$), 541.5 nm ($7 \rightarrow 4$), 486.3 nm ($8 \rightarrow 4$), 454.5 nm ($9 \rightarrow 4$), 434.2 nm ($10 \rightarrow 4$), 420.3 nm ($11 \rightarrow 4$), 410.3 nm ($12 \rightarrow 4$) og 402.8 nm ($13 \rightarrow 4$). Fra $n_f = 5$ serien er det tett med linjer siden overgangsenergien går mot bølgelengden 569.9 nm når $n_i \rightarrow \infty$.

²Omtrentlig, da det avhenger av øyne som ser.

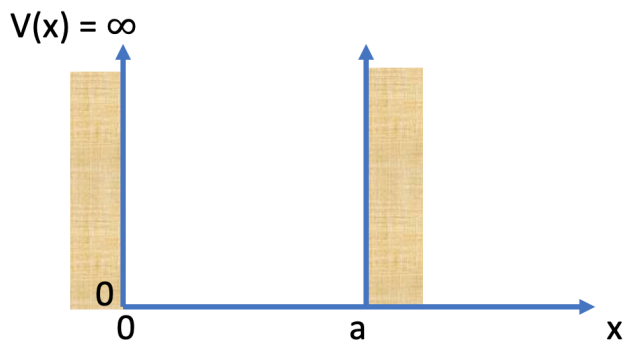
Oppgave 3 Partikkel i boks

Denne oppgaven omhandler en partikkel med masse m som befinner seg i en uendelig potensialbrønn:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (7)$$

- a) Tegn eller plott potensialet. Skriv opp de ortonormerte tidsuavhengige bølgefunksjonene ψ_n , energieigenverdiene E_n og de tilhørende bølgetallene k_n for de stasjonære tilstandene (du finner de i læreboka). Bestem gjennom argumenter (uten å regne) forventningsverdien av partikkelens posisjon i de forskjellige stasjonære tilstandene.

Svar: De ortonormerte tidsuavhengige bølgefunksjonene er gitt ved $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi}{a}x)$ med energieigenverdier $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Alle bølgefunksjonene er enten symmetrisk eller antisymmetrisk om $x = a/2$. Dermed vil partikkelen ha lik sannsynlighet for å være til venstre og til høyre for $x = a/2$, altså har vi $\langle x \rangle_n = a/2$. De tilhørende bølgetall er $k_n = \frac{n\pi}{a}$ for $n = 1, 2, 3, \dots$. Potensialet er skissert i Fig. 1.



Figur 1: Uendelig firkant-potensialbrønn.

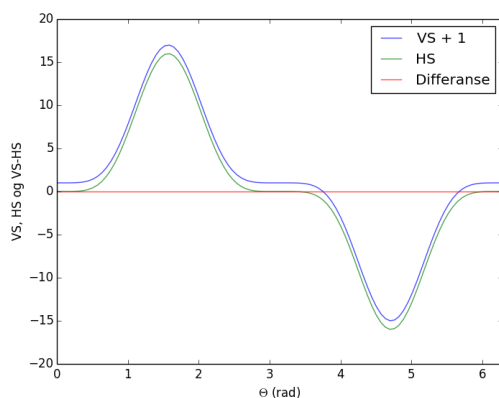
- b) Vi vil i oppgave 3c) bruke funksjonen $\sin^5 \theta$. Vi antar:

$$16 \sin^5 \theta = \sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta. \quad (8)$$

Sannsynliggjør likningen ved å plotte venstre (VS) og høyre side (HS) av likningen for vinkler θ i området $0 - 2\pi$ og vis at de overlapper³.

Svar: Figur 2 viser at Likn. (8) er gyldig.

³Du må gjerne bevise likningen matematisk, men det er tre grunner til å la være: (i) det er et fryktelig pes, (ii) du kommer til å svette og (iii) du får ikke ekstra uttelling for strevet.



Figur 2: Plott av venstre og høyre side (VS og HS) av Likn. (8). For å skille kurvene er det lagt til 1 for VS kurven. Differansen mellom kurvene viser null.

c) Vi preparerer initielt partikkelen i brønnen i en tilstand:

$$\Psi(x, 0) = A \sin^5(\pi x/a). \quad (9)$$

Uttrykk $\Psi(x, 0)$ ved hjelp av de stasjonære tilstandene ψ_n i oppgave 3a) og normér bølgefunksjonen slik at $|\Psi(x, 0)|^2 = 1$. Hint: Bruk Likn. (8) og at ψ_n er ortonormerte.

Svar: Vi bruker Likn. (8) og kan dermed skrive Likn. (9) på formen:

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= A \sqrt{\frac{a}{2}} \left[\frac{10}{16} \psi_1(x) - \frac{5}{16} \psi_3(x) + \frac{1}{16} \psi_5(x) \right] \\ &= A \frac{1}{16} \sqrt{\frac{a}{2}} [10\psi_1(x) - 5\psi_3(x) + \psi_5(x)] \end{aligned} \quad (10)$$

Vi normerer bølgefunksjonen ved å sette

$$\begin{aligned} \int \Psi^* \Psi dx &= |A|^2 \frac{1}{256} \frac{a}{2} \int [10\psi_1^*(x) - 5\psi_3^*(x) + \psi_5^*(x)] \\ &\quad \times [10\psi_1(x) - 5\psi_3(x) + \psi_5(x)] dx \\ &= |A|^2 \frac{a}{512} [100 + 25 + 1] = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

som gir $A = \frac{16}{\sqrt{63a}}$. Den normerte bølgefunksjonen blir dermed

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{126}} [10\psi_1(x) - 5\psi_3(x) + \psi_5(x)]. \quad (12)$$

d) Er $\Psi(x, 0)$ en egentilstand for \hat{H} ? Begrunn svaret.

Svar: Nei, tilstanden er en superposisjon av stasjonære tilstander ψ_n . Disse tilstandene er egentilstander for \hat{H} , altså for energi. Siden energi-eigentilstander må være lineært uavhengige av hverandre, kan ikke $\Psi(x, 0)$ være en egentilstand for energioperatoren \hat{H} .

e) Skriv opp den tidsavhengige bølgefunksjonen $\Psi(x, t)$.

Svar: Vi ser at bølgefunksjonen kan skrives som en sum av tre energi-eigenfunksjoner. Dermed er det enkelt å sette på den tidsavhengige delen:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{126}} \left[10\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} - 5\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + \psi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar} \right] \quad (13)$$

med energieigenverdier E_n fra oppgave 3a).

f) Begrunn (uten å regne) at integraler slik som $\int_0^a x\psi_1\psi_3 dx$, $\int_0^a x\psi_1\psi_5 dx$ og $\int_0^a x\psi_3\psi_5 dx$ er lik null når det integreres mellom 0 og a . Bruk de antatte verdiene $\langle x \rangle_n$ fra oppgave 3a) og finn $\langle x \rangle$ i tilstanden $\Psi(x, t)$.

Svar: Integralene har to like funksjoner (sinuser) og en odde funksjon (x) om symmetripunktet $a/2$. Dermed blir integranden en odde funksjon om $a/2$ som integrert fra 0 til a , gir null. Forventningsverdien av posisjonen blir derfor:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^a \Psi^*(x, t)x\Psi(x, t)dx \\ &= \frac{1}{126} \int_0^a [100\psi_1^*(x)x\psi_1(x) + 25\psi_3^*(x)x\psi_3(x) + 1\psi_5^*(x)x\psi_5(x)]dx \\ &= \frac{1}{126} [100(a/2) + 25(a/2) + 1(a/2)] \\ &= a/2 \end{aligned}$$

hvor kryssleddene er satt lik null og $(e^{-iE_n t/\hbar})^* e^{-iE_n t/\hbar} = 1$.

g) Hva blir resultatet av én energimåling på systemet (du trenger ikke regne ut energien)?

Svar: Du måler enten $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$, $E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ eller $E_5 = \frac{25\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$.

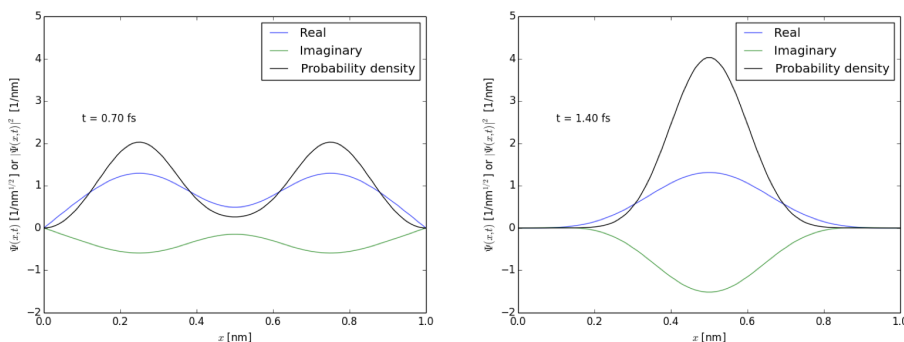
h) Hva er forventningsverdien av energien til partikkelen ved tiden t ?

Svar: Forventningsverdien av energien er tidsuavhengig. Du må vekte de forskjellige egenverdier med absolutt-kvadratet av koeffesienten ($|c_n|^2$) foran energiegenfunksjonene ($|\psi_n|^2$) på denne måten

$$\begin{aligned}\langle H(t) \rangle &= \frac{1}{126} \left[100 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) + 25 \left(\frac{9\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) + 1 \left(\frac{25\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \right) \right] \\ &= \frac{175\pi^2 \hbar^2}{126ma^2}.\end{aligned}\tag{14}$$

- i) Beregn $\Psi(x, t)$ numerisk med $a = 1$ nm og $m = 0.511$ MeV/c². Plott reell og imaginær komponent av $\Psi(x, t)$, samt sannsynlighetstettheten ved tidspunktene $t = 0.7$ fm og $t = 1.4$ fm.

Svar: Du finner et python program `wave_h2019.py` som animerer funksjonenes tidsutvikling. To plott er vist i Fig. 3.



Figur 3: Reell, imaginær og absolutt-kvadratet av bølgefunksjonen som funksjon av posisjon x . Tidspunktene for venstre og høyre figur er tatt ved hhv $t = 0.7$ og $t = 1.4$ fs.

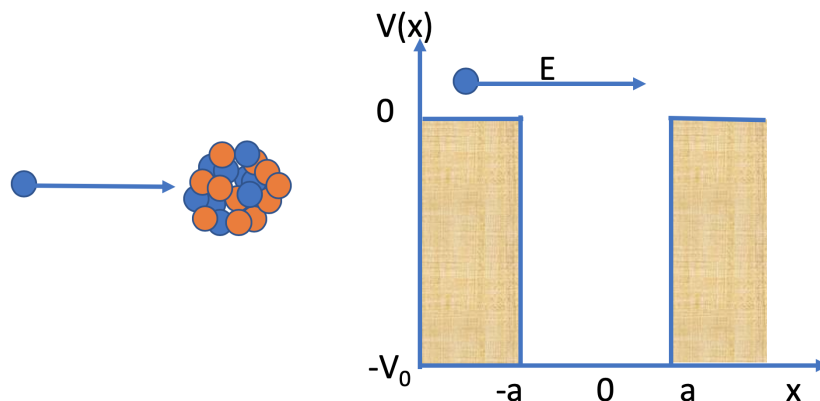
Oppgave 4 Nøytroninnfangning

Kjernerkraft representerer et betydelig bidrag til elektrisitetproduksjonen i verden. Energien blir produsert ved at for eksempel uranisotopen ^{235}U spaltes (fisjonerer) i to tunge fragmenter, typisk med atommasser $A \approx 95$ og $A \approx 140$. Coulombkraften mellom de positivt ladde fragmentene gjør at de kommer opp i høye hastigheter. I neste omgang bremses de ned i vann og tilfører vannet energi på ≈ 200 MeV for hver fisjon.

I fisjonsprosessen blir det frigjort 2–3 nøytroner som igjen kan trenge inn i en annen ^{235}U kjerne for så å gi en ny fisjon. For å holde prosessen i gang, må det være en nøyaktig balanse mellom nøytronfluksen i kjernereaktoren og hvor lett nøytronet kan bli fanget opp av en ny ^{235}U kjerne.

Vi skal her lage en veldig naiv modell for nøytroninnfangning ved bruk av endelig-brønn potensialet. Du trenger her å stjele stoff fra Kap. 2.6 i læreboka (bruk samme symboler og uttrykk).

Figur 4 illustrerer nøytronet som kommer inn fra venstre mot atomkjernen. Diameteren på kjernen tenker vi oss lik $2a$. Potensialet er $V = 0$ utenfor brønnen og $V = -V_0 < 0$ inne i brønnen.



Figur 4: Spredningspotensialet som nøytronet opplever.

- a) Sett opp de formelle uttrykkene for bølgefunksjonene i de tre områdene med symboler fra læreboka (A, B, C, D, F, k og l). Får vi spredningstilstander eller bundne tilstander inne i brønnen? Begrunn svaret.

Svar: Vi får spredningstilstander inne i brønnen, siden nøytronet kommer inn med $E > 0$. Bølgefunksjonene er generelt gitt ved:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, x < -a \quad (15)$$

$$\psi_2(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx), -a < x < a \quad (16)$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ikx}, x > a \quad (17)$$

- b) Vi antar at den innkommende bølgen Ae^{ikx} har amplitude $A = 1$. Læreboka gir et uttrykk for F ved hjelp av A . Videre er B uttrykt ved F . Vis at de resterende amplityder C og D kan uttrykkes som:

$$C = \left[\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la) \right] e^{ika} F \quad (18)$$

$$D = \left[\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la) \right] e^{ika} F. \quad (19)$$

Svar: Multipliserer de to likningene i læreboka i Kap. 2.6 som oppgir sammenhengen mellom C , D og F

$$C \sin(la) + D \cos(la) = Fe^{ika} \quad (20)$$

$$l [C \cos(la) - D \sin(la)] = ikFe^{ika} \quad (21)$$

med passende konstanter. Dvs. ganger Likn. (20) med $l \cos(la)$ og Likn. (21) med $-\sin(la)$, og legger dem sammen slik at C -leddene forsvinner:

$$Dl(\cos^2(la) + \sin^2(la)) = Fe^{ika}l \cos(la) - Fe^{ika}ik \sin(la) \quad (22)$$

$$D = \left[\cos(la) - i \frac{k}{l} \sin(la) \right] e^{ika} F, \quad (23)$$

der vi har brukt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. For å finne C ganger vi Likn. (20) med $l \sin(la)$ og Likn. (21) med $\cos(la)$, og legger dem sammen slik at D -leddene forsvinner. Dermed får vi

$$C = \left[\sin(la) + i \frac{k}{l} \cos(la) \right] e^{ika} F. \quad (24)$$

$$(25)$$

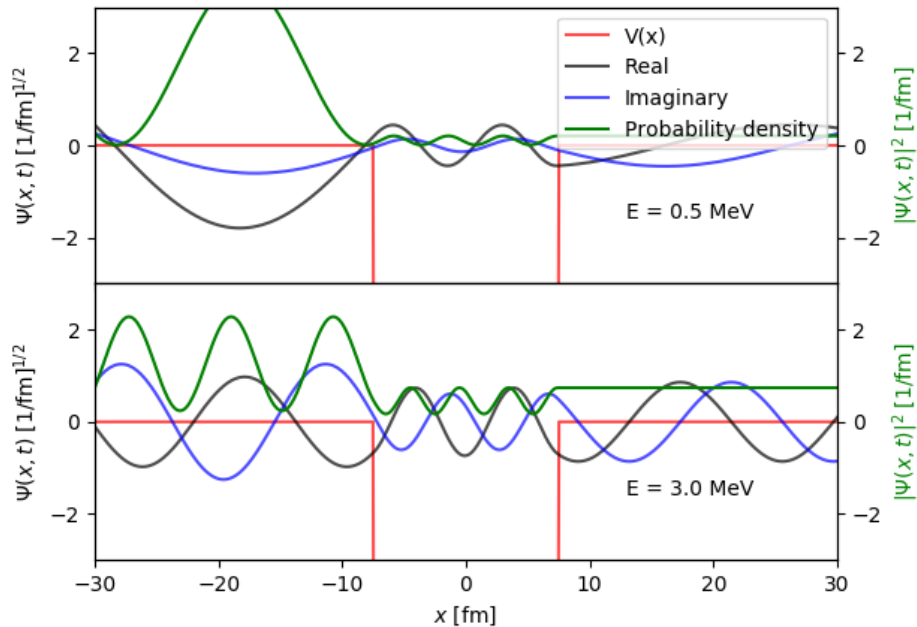
- c) Finn i litteraturen (eller på annen måte) typisk radius R til ^{235}U i fm og hvileenergien til nøytronet i MeV.

Svar: Radiusen er gitt ved $R \approx 1.2A^{1/3}$ fm ≈ 7.4 fm der atommassen til uran er $A = 235$. Nøytronets hvileenergi er 939.6 MeV.

- d) Lag et program (i ditt favoritt-språk, f.eks. `python`) der du viser reell og imaginær del av bølgefunksjonen samt sannsynlighetstettheten mellom -30 og 30 fm. Potensialets dybde settes til $V_0 = 10$ MeV. Plott tilfellene med inngående nøytronenergi $E_n = 0.5$ og 3 MeV. Hvilken nøytronenergi gir høyest sannsynlighet for at nøytronet befinner seg inne i kjernen?

Svar: Du finner et `python` program `scatter_h2019.py` som beregner og plotter den spredte bølgen og sannsynlighetstettheten, se Fig. 5.

Diskusjon: Siden det ikke er mulig å normalisere $|\Psi(x)|^2$, er det vanskelig å tolke den fysiske situasjonen. Vi kan prøve å bruke transmisjons- og refleksjonskoeffesienter, men siden dette er en spredningstilstand, forteller ikke dette oss direkte om nøytronet blir absorbert eller ikke. Likevel kan vi finne ut hvilken nøytronenergi som gir høyest sannsynlighet for å finne nøytronet i kjernen. Alternativ kunne vi har beregnet integralet mellom $-a$ og a , men støter igjen på vanskeligheter med å tolke sannsynlighetstettheten. Vi finner at $E = 3$ MeV gir høyest sannsynlighet for at nøytronet befinner seg inne i kjernen. (Som beskrevet



Figur 5: Bølgefunksjoner og sannsynlighetstettheter for to nøytronenergier.

i neste oppgavedel, er det ikke det samme som nøytroninnfangning, fordi da må nøytronet forbli i kjernen.)

- e) Det viser seg at vår modell beskriver dårlig eksperimentelle data på nøytroninnfangning i atomkjernen. Antyd kort mulige forbedringer av modellen.

Svar: Modellen er én-dimensjonal, og skulle vært beskrevet ved sfæriske koordinater i tre dimensjoner. Videre mangler det kopling til nukleon-nukleon kollisjoner og γ utsending ved elektromagnetisk vekselvirkning med nukleonene (som ikke er del av dette kurset – og derfor ikke forventes besvart).