FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2020
Hjemmeeksamen

(Versjon 5. mars 2020)

Viktig info:

- Elektronisk innlevering via **Inspera** med frist mandag 23. mars 2020 kl. 14:00. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, ikke vanlig foto med mobiltelefon. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i utregningene.
- Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skal skje anonymt via Inspera.
- Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å få gå opp til endelig eksamen.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder gjerne relevante plott og programkode i pdf-filen.
- Inspera tar bare ett dokument. Det er derfor viktig at alt materiale lastes opp **i én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en.
- Lykke til!

Denne hjemmeoppgaven skal hovedsakelig dreie seg om nøytronet som har utallige anvendelser i nukleær medisin, materialundersøkelser og energiproduksjon. James Chadwick mottok Nobelprisen i fysikk i 1935 for sin oppdagelse av nøytronet (1932). Det var først i 1935 at han, sammen med sin student Maurice Goldhaber, kunne utføre nøyaktige målinger av nøytronets masse. I dag er massen målt til å være $1.67492749804(95)10^{-27}$ kg. Selv om nøytronet er ≈ 2000 ganger tyngre enn elektronet, kan vi benytte de samme kvantemekaniske lovene som vi ellers har lært om i kurset. Men ettersom skaleringen er annerledes, kan det lønne seg å bruke andre enheter for energi, lengde og tid, nemlig MeV, fm (10^{-15} m) og fs (10^{-15} s).

Oppgave 1 Nøytronets kvantemekaniske egenskaper

a) Uttrykk nøytronets masse i enheter av MeV/c^2 (det er tilstrekkelig med 4 siffers nøyaktighet).

Teoretikeren *Louis Victor duc de Broglie* fikk Nobelprisen i fysikk i 1929 for sin relasjon $\lambda = h/p$.

b) Hva representerer symbolene i de Broglie-relasjonen og hva beskriver relasjonen? Fra hvor hentet de Broglie inspirasjon til denne revolusjonerende ideen i sin doktoravhandling?

c) Nevn to eksperimenter som bekreftet materiens bølgenatur og tegn en skisse av eksperimentene.

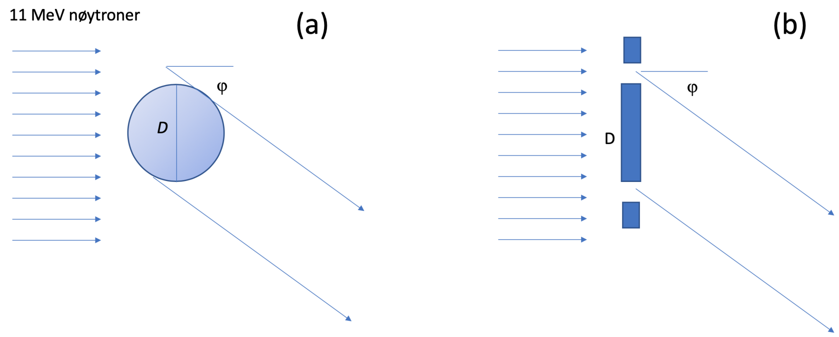
Oppgave 2 Nøytronspredning på atomkjerner

I denne oppgaven skal vi anvende nøytroner med en kinetisk energi på $K = 11$ MeV.

a) Finn de Broglie-bølgelengden til nøytronet og sammenlikn dette med bølgelengden for elektroner med energi på 11 MeV.

b) Dersom du vil undersøke et objekt med utstrekning på noen femtometer, ville du brukt 11 MeV elektroner eller 11 MeV nøytroner? Begrunn svaret.

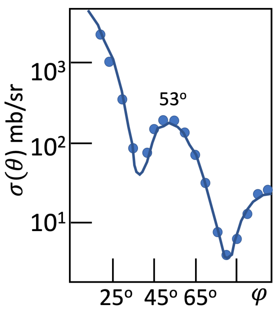
Vi ønsker å finne radius til forskjellige atomkjerner som funksjon av deres massetall A som er summen av antall nøytroner og protoner ($A = N + Z$). Vi tenker oss at strålen med nøytroner kommer fra venstre i Fig. 1(a) og spres mot en atomkjerne med diameter D og måler så de spredte nøytronene i en vinkel ϕ langt vekk fra kollisjonsstedet. Ettersom dette tre-dimensjonale problemet er noe komplisert å regne på, forenkler vi det til to dimensjoner slik som skissert i Fig. 1(b).



Figur 1: Illustrasjon av nøytronspredning mot en atomkjerne, se venstre side (a). Til høyre (b) vises det forenklede bildet som vi skal regne på.

c) Finn sammenhengen mellom spredningsvinkel ϕ og nøytronets bølgelengde når den spredte nøytronstrålen gir maksimal intensitet (konstruktiv interferens)[1].

Figur 2 viser målinger av utgående nøytroner fra spredning mot ^{120}Sn (tinn). Den første positive interferens skjer ved $\phi \approx 53°$. Tilsvarende målinger [1] for atomkjernene ^{92}Mo (molybden) og ^{206}Pb (bly), er listet i Tab. 1. Tabellen gir vinkelen ϕ med måleusikkerhet $\Delta\phi$ som funksjon av massetallet A.



Figur 2: Virkningstverrsnittet (intensitet) som funksjon av spredningsvinkel ϕ for nøytroner med energi 11 MeV spredt mot tinn. Figuren er en reproduksjon av et av plottene i Fig. 3 hentet fra Ref. [1].

d) Bruk dataene i Tab. 1 og finn radiusen ($R = D/2$) til de tre atomkjernene ved hjelp av uttrykket du fant i oppgave 2c).

[1] Presisering: Vi ønsker ikke det trivielle tilfellet med $\phi = 0°$, men den neste mulige vinkel.

Tabell 1: Avlest vinkel ϕ for konstruktiv interferens for nøytroner med energi 11 MeV mot forskjellige atomkjerner, hentet fra Ref. [1].

Atomkjerne	^{92}Mo	^{120}Sn	^{206}Pb
Massenummer A	92	120	206
Spredningsvinkel ϕ	$60 \pm 2°$	$53 \pm 2°$	$41 \pm 2°$

Atomkjernen regnes å være veldig kompakt slik at volumet er proporsjonalt med antall nukleoner, dvs $V \propto A$. Siden atomkjernens volum er gitt ved $V = (4/3)\pi R^3$, finner vi at radiusen er gitt ved $R \propto A^{1/3}$. Fra diverse spredningsforsøk har man funnet at radiusen følger den empiriske likningen

$$R(A) = r_0 A^{1/3}, \tag{1}$$

hvor $r_0 = 1.2 \pm 0.1$ fm.

e) Plott de eksperimentelle datapunktene med usikkerheter sammen med de empiriske kurvene beskrevet av Likn. (1). Kommentér resultatet.

Oppgave 3 Deuteronet

Deuteronet består av et proton og et nøytron og har massetall $A = 2$. Kjernekraften mellom protonet og nøytronet er akkurat sterk nok til å binde systemet sammen. I første omgang vil vi gjøre et grovt overslag for den kinetiske energien som nøytronet er utsatt for i deuteronet. Vi antar grovt at Heisenbergs uskarphetsrelasjon kan brukes på denne måten $\sigma_x \sigma_p \approx Rp \approx \hbar$ hvor R er atomkjernens radius.

a) Bruk uskarphetsrelasjonen over og R fra Likn. (1) og beregn den kinetiske energien K for nøytronet. Hvor stort må potensialet V være for at systemet skal være bundet?

Overslaget over var meget grovt, og vi vil i det påfølgende bruke mer realistiske verdier for deuteronet, nemlig $R = 2.1$ fm og $V_0 = 35$ MeV. Videre kan vi redusere to-legeme problemet til et ett-legeme problem ved å innføre redusert masse μ. Vi snakker dermed om deuteronets energi (og ikke nøytronets eller protonets energi). Siden proton- og nøytronmassen er praktisk talt like, setter vi den reduserte massen som $\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_n/2$, hvor vi tar verdien for m_n fra oppgave 1a). Videre er deuteronet et tre-dimensjonalt system. Hvis vi setter $u(r) = r\psi(r, \theta, \phi)$, kan Schrödingerlikningen for den laveste løsningen reduseres til en dimensjon i r (dette blir vist senere i kurset).

Det er overraskende at denne egenverdilikningen for $u(r)$ blir helt analog til den en-dimensjonale Schrödingerlikningen, og gitt ved

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r) \tag{2}$$

med potensialet

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for} \quad r < R \\ 0 & \text{for} \quad r > R \end{cases}, \tag{3}$$

hvor $V_0 > 0$. I tillegg til grensebetingelsene gitt ved potensialet, må vi huske at polarkoordinaten r alltid er en positiv størrelse ($r \geq 0$). Ettersom $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$, må vi i tillegg forlange at $u(r = 0) = 0$ slik at ψ blir endelig for $r = 0$. Vi velger i det følgende en vilkårlig normering[2] av den sammensatte bølgefunksjon $u(r)$.

b) Skissér potensialet og skriv ned de generelle løsningene $u(r)$ til den tidsuavhengige Schrödingerlikningen (Likn. (2)) i de to områdene.

c) Bruk kontinuitetsbetingelsene ved $r = R$ og $u(0) = 0$ for å finne den transendentale likningen

$$k\cot(kR) = -\kappa, \tag{4}$$

hvor $k = \sqrt{2\mu(E + V_0)/\hbar^2}$ og $\kappa = \sqrt{-2\mu E/\hbar^2}$.

d) Plott venstre og høyre side av Likn. (4) som funksjon av energien E fra -35 til 0 MeV (det kan passe å ha y-akse fra -1.0 til +0.5 fm^{-1}).

e) Finn med 3 siffers nøyaktighet den energien E som tilfredsstiller Likn. (4).

f) Plott bølgefunksjonen $u(r)$ som funksjon av r fra 0 til 10 fm. Da u ikke er normert, trenger du ikke enheter langs y-aksen.

g) Animér den tilsvarende tidsavhengige bølgefunksjonen

$$\Psi(r,t) = \frac{u(r)}{r}\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right), \tag{5}$$

ved å plotte den reelle og imaginære delen av $\Psi(r,t)$, samt $|\Psi(r,t)|^2$. Det er tilstrekkelig hvis du viser plott for tiden $t = 5$ fs og $t = 10$ fs. Da det ikke kreves at du normerer $\Psi(r,t)$, trenger du ikke enheter langs y-aksen.

[2] En normering ville kreve et tre-dimensjonalt integral med integrering over polarkoordinatene $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$ som vi ikke har hatt i kurset ennå, dere trenger derfor ikke å tenke på tallet foran bølgefunksjonen u.

Nøytronet er såvidt bundet sammen av den sterke kjernekraftens potensial som er tilnærmet lik ≈ 35 MeV. Hvis potensialets dybde V_0 hadde vært noe mindre, hadde det ikke eksistert noe stabilt to-nukleon system, og vi kunnet ikke ha vært her våren 2020 på Fysisk institutt for å diskutere denne muligheten. Neste oppgave viser hvordan vi kan studere eksistensen av deuteronet og av det universet vi lever i.

h) Hva skjer hvis bølgefunksjonen har maksimum ved $r = R = 2.1$ fm? Bestem den tilsvarende V_0 som bestemmer om vi har et stabilt deuteron eller ikke.

Bibliografi

[1] J. C. Ferrer, J. D. Carlson and J. Rapaport, Nucl. Phys. **A 275**, 325 (1977).