

# FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2020

## Hjemmeeksamen

(Versjon 17. mars 2020)

### Viktig info:

- Elektronisk innlevering via **Inspira** med frist mandag 23. mars 2020 kl. 14:00. Leveringsfristen er absolutt.
- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Bruk scanner eller app, ikke vanlig foto med mobiltelefon. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.
- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i utregningene.
- Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skal skje anonymt via Inspira.
- Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140 og må være bestått for å få gå opp til endelig eksamen.
- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Til gjengjeld skal den innleverte besvarelsen være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.
- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder gjerne relevante plott og programkode i pdf-filen.
- Inspira tar bare ett dokument. Det er derfor viktig at alt materiale lastes opp i **én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en.
- Lykke til!

Denne hjemmeoppgaven skal hovedsakelig dreie seg om nøytronet som har utallige anvendelser i nukleær medisin, materialundersøkelser og energi-produksjon. James Chadwick mottok Nobelprisen i fysikk i 1935 for sin oppdagelse av nøytronet (1932). Det var først i 1935 at han, sammen med sin student Maurice Goldhaber, kunne utføre nøyaktige målinger av nøytronets masse. I dag er massen målt til å være  $1.67492749804(95)10^{-27}$  kg. Selv om nøytronet er  $\approx 2000$  ganger tyngre enn elektronet, kan vi benytte de samme kvantemekaniske lovene som vi ellers har lært om i kurset. Men ettersom skaleringen er annerledes, kan det lønne seg å bruke andre enheter for energi, lengde og tid, nemlig MeV, fm ( $10^{-15}$  m) og fs ( $10^{-15}$  s).

### Oppgave 1 Nøytronets kvantemekaniske egenskaper

- a) Uttrykk nøytronets masse i enheter av  $\text{MeV}/c^2$  (det er tilstrekkelig med 4 siffrers nøyaktighet).

**Svar:** Vi regner om fra kg til  $\text{MeV}/c^2$  ved at  
 $1\text{kg} = 5.6095883571872 \cdot 10^{29} \text{MeV}/c^2$ . Dermed blir  
 $m_n = 1.67492749804 \cdot 10^{-27} \text{kg} \times 5.6095883571872 \cdot 10^{29} (\text{MeV}/c^2)/\text{kg}$   
 $= 939.6 \text{MeV}/c^2$ .

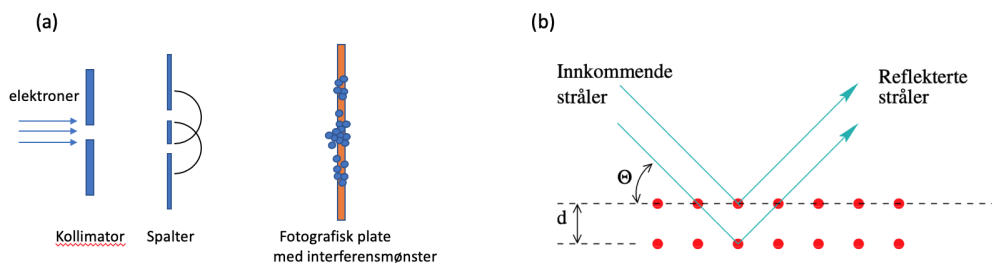
Teoretikeren *Louis Victor duc de Broglie* fikk Nobelprisen i fysikk i 1929 for sin relasjon  $\lambda = h/p$ .

- b) Hva representerer symbolene i de Broglie-relasjonen og hva beskriver relasjonen? Fra hvor hentet de Broglie inspirasjon til denne revolusjonerende ideen i sin doktoravhandling?

**Svar:** Her er  $\lambda =$  bølgelengde,  $h =$  Plancks konstant og  $p =$  bevegelsesmengde. Relasjonen beskriver den bølgelengde som kan tillegges en partikkel med en bestemt bevegelsesmengde. Utfra Plancks og Einsteins forslag om at elektromagnetiske bølger kan ha partikkelnatur, foreslo de Broglie den omvendte hypotese, nemlig at partikler kunne ha bølgenatur.

- c) Nevn to eksperimenter som bekreftet materiens bølgenatur og tegn en skisse av eksperimentene.

**Svar:** Figur 1 viser to eksperimenter som avslører elektroners bølgenatur (se kompendiet): Dobbeltpalteeksperimentet og Braggdiffraksjon.



Figur 1: Dobbeltspalteeksperiment (a) og Braggdiffraksjonseksperiment (b) demonstrerer materiens bølgenatur. Figuren til høyre er hentet fra kompendiet.

## Oppgave 2 Nøytronspredning på atomkjerner

I denne oppgaven skal vi anvende nøytroner med en kinetisk energi på  $K = 11$  MeV.

- a) Finn de Broglie-bølglengden til nøytronet og sammenlikn dette med bølglengden for elektroner med energi på 11 MeV.

**Svar:** Relativistisk er en partikkels totale energi  $E$  summen av kinetisk energi og hvileenergi, som er gitt ved

$$E = K + mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (1)$$

Vi løser mhp  $pc$  og får

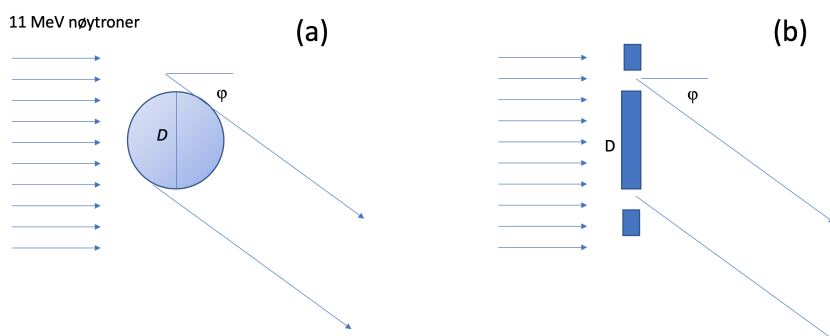
$$pc = \sqrt{K^2 + 2Kmc^2} \quad (2)$$

Vi setter inn  $m_n c^2 = 939.6$  MeV og  $m_e c^2 = 0.511$  MeV for nøytroner og elektroner og får  $\lambda_n = \frac{hc}{p_n c} = 8.60$  fm og  $\lambda_e = \frac{hc}{p_e c} = 108$  fm. (Dersom vi hadde regnet klassisk, blir  $\lambda_n = 8.62$  fm og  $\lambda_e = 370$  fm, som gir stor feil for elektroner).

- b) Dersom du vil undersøke et objekt med utstrekning på noen femtometer, ville du brukt 11 MeV elektroner eller 11 MeV nøytroner? Begrunn svaret.

**Svar:** Man må bruke partikler med bølglengde som er sammenliknbar med objektets størrelse. Partikler med lenger bølglengde vil ikke kunne 'føle' objektets utstrekning, altså at vekselvirkningen gir opphav til bølgefenomener som interferens og diffraksjon som gjør det mulig å lese ut informasjon om objektet. Vi velger derfor nøytroner i denne sammenhengen.

Vi ønsker å finne radius til forskjellige atomkjerner som funksjon av deres massetall  $A$  som er summen av antall nøytroner og protoner ( $A = N + Z$ ). Vi tenker oss at strålen med nøytroner kommer fra venstre i Fig. 2(a) og spres mot en atomkjerne med diameter  $D$  og måler så de spredte nøytronene i en vinkel  $\phi$  langt vekk fra kollisjonsstedet. Ettersom dette tre-dimensjonale problemet er noe komplisert å regne på, forenkler vi det til to dimensjoner slik som skissert i Fig. 2(b).



Figur 2: Illustrasjon av nøytronspredning mot en atomkjerne, se venstre side (a). Til høyre (b) vises det forenklete bildet som vi skal regne på.

- c) Finn sammenhengen mellom spredningsvinkel  $\phi$  og nøytronets bølgelengde når den spredte nøytronstrålen gir maksimal intensitet (konstruktiv interferens)<sup>1</sup>.

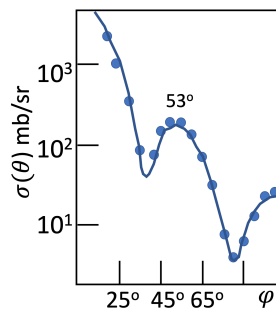
**Svar:** Vi får konstruktiv interferens når partikler i Fig. 2(b) fra øvre 'spalte' har en ekstra veilengde i forhold til partiklene fra nederste 'spalte' som er lik partiklenes bølgelengde. Maksimal interferens skjer derfor når  $\lambda = D \sin \phi$ .

Figur 3 viser målinger av utgående nøytroner fra spredning mot  $^{120}\text{Sn}$  (tinn). Den første positive interferens skjer ved  $\phi \approx 53^\circ$ . Tilsvarende målinger [1] for atomkjernene  $^{92}\text{Mo}$  (molybden) og  $^{206}\text{Pb}$  (bly), er listet i Tab. 1. Tabellen gir vinkelen  $\phi$  med måleusikkerhet  $\Delta\phi$  som funksjon av massetallet  $A$ .

- d) Bruk dataene i Tab. 1 og finn radiusen ( $R = D/2$ ) til de tre atomkjernene ved hjelp av uttrykket du fant i oppgave 2c).

**Svar:** Vi regner radius fra likningen  $R = \lambda/2 \sin \phi$ . Usikkerheten i estimatene skyldes avlest  $\phi$  som regnes å være  $\pm 2^\circ$  for de målte vinklene. Radiuser med usikkerheter er listet i Tab. 2.

<sup>1</sup>Presisering: Vi ønsker ikke det trivielle tilfellet med  $\phi = 0^\circ$ , men den neste mulige vinkel.



Figur 3: Virkningstverrsnittet (intensitet) som funksjon av spredningsvinkel  $\phi$  for nøytroner med energi 11 MeV spredt mot tinn. Figuren er en reproduksjon av et av plottene i Fig. 3 hentet fra Ref. [1].

Tabell 1: Avlest vinkel  $\phi$  for konstruktiv interferens for nøytroner med energi 11 MeV mot forskjellige atomkjerne, hentet fra Ref. [1].

Atomkjerne	$^{92}\text{Mo}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{206}\text{Pb}$
Massennummer $A$	92	120	206
Spredningsvinkel $\phi$	$60 \pm 2^\circ$	$53 \pm 2^\circ$	$41 \pm 2^\circ$

Tabell 2: Radius  $R$  beregnet fra  $\phi$  og  $\lambda$ .

Atomkjerne	$^{92}\text{Mo}$	$^{120}\text{Sn}$	$^{206}\text{Pb}$
Massennummer $A$	92	120	206
Radius $R$ [fm]	$4.97 \pm 0.10$	$5.38 \pm 0.14$	$6.55 \pm 0.25$

Atomkjernen regnes å være veldig kompakt slik at volumet er proporsjonalt med antall nukleoner, dvs  $V \propto A$ . Siden atomkjernens volum er gitt ved  $V = (4/3)\pi R^3$ , finner vi at radiusen er gitt ved  $R \propto A^{1/3}$ . Fra diverse spredningsforsøk har man funnet at radiusen følger den empiriske likningen

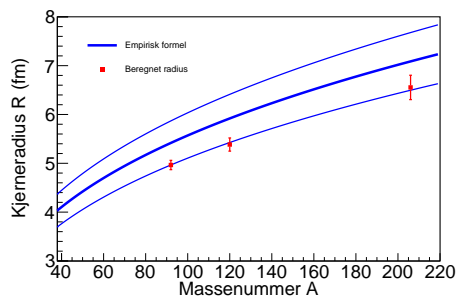
$$R(A) = r_0 A^{1/3}, \quad (3)$$

hvor  $r_0 = 1.2 \pm 0.1$  fm.

- e) Plott de eksperimentelle datapunktene med usikkerheter sammen med de empiriske kurvene beskrevet av Likn. (3). Kommentér resultatet.

**Svar:** Figur 4 viser de beregnede eksperimentelle verdiene (datapunkter med usikkerheter) sammen med antatt empirisk funksjon  $R(A)$ .

Datapunktene gir den riktige funksjonelle form og ligger på kanten av den laveste empiriske kurven. Tross de lave verdiene er vår 'modell' overraskende god sett i lys av de grove antagelsene som er gjort, spesielt det at vi regner i to i stedet for tre dimensjoner. Våre beregninger støtter opp om de Broglies hypotese om at partikler kan ha bølgenatur.



Figur 4: Atomkjerners radius  $R$  som funksjon av massetall  $A$ .

### Oppgave 3 Deuteronet

Deuteronet består av et proton og et nøytron og har massetall  $A = 2$ . Kjernekraften mellom protonet og nøytronet er akkurat sterk nok til å binde systemet sammen. I første omgang vil vi gjøre et grovt overslag for den kinetiske energien som nøytronet er utsatt for i deuteronet. Vi antar grovt at Heisenbergs uskarphetsrelasjon kan brukes på denne måten  $\sigma_x \sigma_p \approx R p \approx \hbar$  hvor  $R$  er atomkjernens radius.

- a) Bruk uskarphetsrelasjonen over og  $R$  fra Likn. (3) og beregn den kinetiske energien  $K$  for nøytronet. Hvor stort må potensialet  $V$  være for at systemet skal være bundet?

**Svar:** Vi innsetter radius  $R = 1.5119$  fm og hvileenergien til nøytronet, og får

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2R^2m} = \frac{(\hbar c)^2}{2R^2 m c^2} = 9.1 \text{ MeV}. \quad (4)$$

Dette betyr at potensialet er dypere enn 9.1 MeV.

Overslaget over var meget grovt, og vi vil i det påfølgende bruke mer realistiske verdier for deuteronet, nemlig  $R = 2.1$  fm og  $V_0 = 35$  MeV. Videre kan vi redusere to-legeme problemet til et ett-legeme problem ved å innføre

redusert masse  $\mu$ . Vi snakker dermed om deutronets energi (og ikke nøytronets eller protonets energi). Siden proton- og nøytronmassen er praktisk talt like, setter vi den reduserte massen som  $\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_n/2$ , hvor vi tar verdien for  $m_n$  fra oppgave 1a). Videre er deutronet et tre-dimensjonalt system. Hvis vi setter  $u(r) = r\psi(r, \theta, \phi)$ , kan Schrödingerlikningen for den laveste løsningen reduseres til en dimensjon i  $r$  (dette blir vist senere i kurset). Det er overraskende at denne egenverdilikningen for  $u(r)$  blir helt analog til den en-dimensjonale Schrödingerlikningen, og gitt ved

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r) \quad (5)$$

med potensialet

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r < R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}, \quad (6)$$

hvor  $V_0 > 0$ . I tillegg til grensebetingelsene gitt ved potensialet, må vi huske at polarkoordinaten  $r$  alltid er en positiv størrelse ( $r \geq 0$ ). Etersom  $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$ , må vi i tillegg forlange at  $u(r=0) = 0$  slik at  $\psi$  blir endelig for  $r = 0$ . Vi velger i det følgende en vilkårlig normering<sup>2</sup> av den sammensatte bølgefunksjon  $u(r)$ .

- b) Skissér potensialet og skriv ned de generelle løsningene  $u(r)$  til den tidsuavhengige Schrödingerlikningen (Likn. (5)) i de to områdene.

**Svar:** Figur 5 viser potensialet hvor  $r$  bare antar positive størrelser. Partikkelen er bundet i potensialbrønnen  $V = -V_0$  med energi  $E$ . Den generelle løsningen for  $0 < r < R$  er

$$u(r) = A \sin kr + B \cos kr, \quad (7)$$

og for  $r > R$

$$u(r) = C e^{-\kappa r} + D e^{\kappa r}, \quad (8)$$

hvor  $k = \sqrt{2\mu(E + V_0)/\hbar^2}$  og  $\kappa = \sqrt{-2\mu E/\hbar^2}$ .

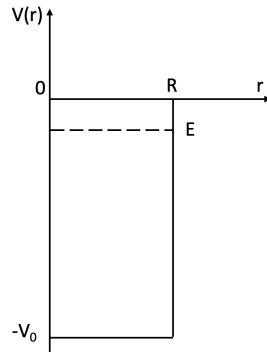
- c) Bruk kontinuitetsbetingelsene ved  $r = R$  og  $u(0) = 0$  for å finne den transendentale likningen

$$k \cot(kR) = -\kappa, \quad (9)$$

hvor  $k = \sqrt{2\mu(E + V_0)/\hbar^2}$  og  $\kappa = \sqrt{-2\mu E/\hbar^2}$ .

---

<sup>2</sup>En normering ville kreve et tre-dimensjonalt integral med integrering over polarkoordinatene  $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$  som vi ikke har hatt i kurset ennå, dere trenger derfor ikke å tenke på tallet foran bølgefunksjonen  $u$ .



Figur 5: Det sfæriske brønn-potensialet for deuteronet. Radiusen på brønnen er  $R$  med bunn ved  $V = -V_0$  (dybde  $V_0$ ).

**Svar:** Kravet at  $u(r = 0) = 0$  gir at  $B = 0$ . Videre må  $D = 0$  fordi bølgefunksjonen må være endelig når  $r \rightarrow \infty$ . Vi skal nå lime sammen  $u(r)$  og  $du(r)/dr$  ved  $r=R$ :

$$A \sin kR = C e^{-\kappa R} \quad (10)$$

$$Ak \cos kR = -\kappa C e^{-\kappa R}. \quad (11)$$

Vi dividerer likningene på hverandre og får  $k \cot(kR) = -\kappa$ .

- d) Plott venstre og høyre side av Likn. (9) som funksjon av energien  $E$  fra -35 til 0 MeV (det kan passe å ha y-akse fra -1.0 til +0.5 fm<sup>-1</sup>).

**Svar:** Figur 6 viser et plott av venstre og høyre side av Likn. (9) som funksjon av energien  $E$ .

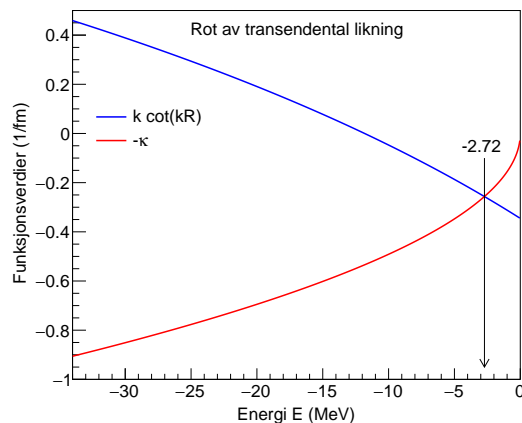
- e) Finn med 3 siffrers nøyaktighet den energien  $E$  som tilfredsstiller Likn. (9).

**Svar:** Med tilstrekkelige små steps i  $E$  kan man finne nøyaktig hvor kurvene krysser, eventuelt bruke en mer fancy funksjon for å finne krysningpunktet. Vi finner  $E = -2.72$  MeV.

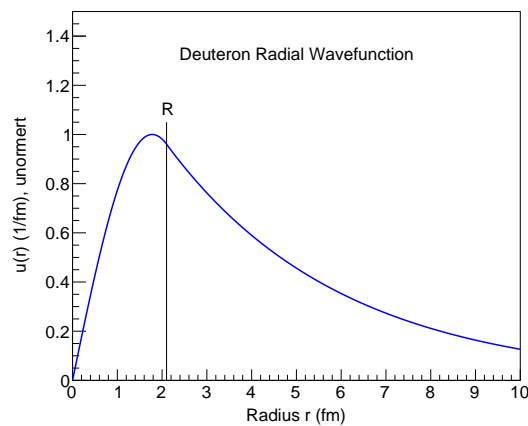
- f) Plott bølgefunksjonen  $u(r)$  som funksjon av  $r$  fra 0 til 10 fm. Da  $u$  ikke er normert, trenger du ikke enheter langs y-aksen.

**Svar:** Figur 7 viser et plott av bølgefunksjonen  $u(r)$  som viser at en betydelig del av den reduserte masse er utenfor det sfæriske brønn-potensialet.





Figur 6: Plott av venstre og høyre side av Likn. (9) som funksjon av  $E$ .



Figur 7: Den radielle bølgefunksjonen  $u(r)$  plottet for deuteronet.

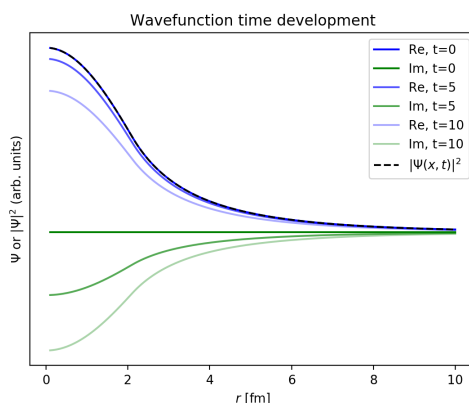
g) Animér den tilsvarende tidsavhengige bølgefunksjonen

$$\Psi(r, t) = \frac{u(r)}{r} \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right), \quad (12)$$

ved å plotte den reelle og imaginære delen av  $\Psi(r, t)$ , samt  $|\Psi(r, t)|^2$ . Det er tilstrekkelig hvis du viser plott for tiden  $t = 5$  fs og  $t = 10$  fs. Da det ikke kreves at du normerer  $\Psi(r, t)$ , trenger du ikke enheter langs y-aksen.

**Svar:** Figur 8 viser reelle og imaginære delen av  $\Psi(r, t)$ , samt  $|\Psi(r, t)|^2$

ved tidspunktene  $t = 0$ ,  $t = 5$  og  $t = 10$  fs



Figur 8: Plott av den reelle og imaginære delen av  $\Psi(r, t)$ , samt  $|\Psi(r, t)|^2$  ved tidspunktene  $t = 0$ ,  $t = 5$  og  $t = 10$  fs.

Nøytronet er såvidt bundet sammen av den sterke kjernekraftens potensial som er tilnærmet lik  $\approx 35$  MeV. Hvis potensialets dybde  $V_0$  hadde vært noe mindre, hadde det ikke eksistert noe stabilt to-nukleon system, og vi kunne ikke ha vært her våren 2020 på Fysisk institutt for å diskutere denne muligheten. Neste oppgave viser hvordan vi kan studere eksistensen av deutronet og av det universet vi lever i.

- h) Hva skjer hvis bølgefunksjonen har maksimum ved  $r = R = 2.1$  fm? Bestem den tilsvarende  $V_0$  som bestemmer om vi har et stabilt deutron eller ikke.

**Svar:** Dersom  $u(r)$  har maksimum ved  $r = R$  vil det kreve at bølgefunksjonen for  $r > R$  blir en konstant med  $e^{-\kappa r} \rightarrow e^{-0r} = 1$ . Dermed er ikke bølgefunksjonen normerbar. Vi finner dette når bølgefunksjonen inne i boksen  $A \sin kr$  blir  $A$  for  $r = R$ . Kan enkelt forlange at den deriverte da blir 0, med andre ord at  $\cos(kR) = 0$ . Vi ser da på tilfellet når  $E = 0$  som følger

$$\cos \sqrt{\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2}} R \rightarrow \cos \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} R = 0. \quad (13)$$

som gir

$$V_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{2\mu c^2 R^2} = 23.18 \text{ MeV}. \quad (14)$$

# Bibliografi

- [1] J. C. Ferrer, J. D. Carlson and J. Rapaport, Nucl. Phys. **A 275**, 325 (1977).