FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Hjemmeeksamen

Oppgave1 Måling

a) Hvordan kan vi måle forventningsverdien $\langle x \rangle$? Velg ett alternativ og begrunn svaret.

1. Sett opp en serie av mange like partikler, og mål posisjonen til hver av dem og finn gjennomsnittet.
2. Mål posisjonen til den samme partikkelen igjen og igjen veldig mange ganger, og finn gjennomsnittet.

b) I praksis finnes det ikke noe instrument som kan måle en partikkels bevegelsesmengde nøyaktig. Det gjelder også om vi ikke måler posisjonen i det hele tatt. Det vil alltid være en usikkerhet i målingen. Skyldes dette Heisenbergs uskarphetsrelasjon? Begrunn svaret.

c) Vi sender elektroner gjennom en dobbeltspalte og detekterer hvor de treffer på en skjerm bak dobbetspalten. Hvilket mønster får vi på skjermen i de ulike tilfellene under? Begrunn svaret.

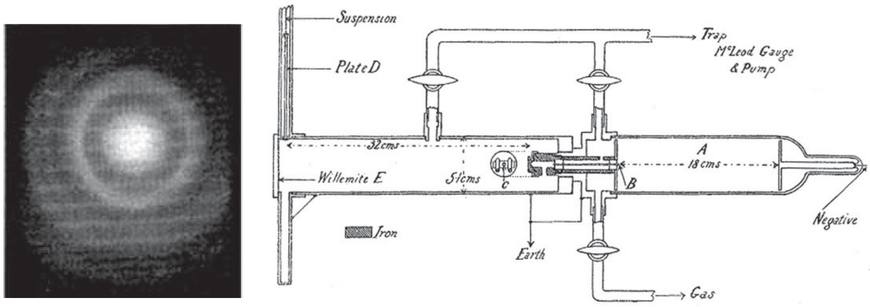
1. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten.
2. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten, men ett og ett i gangen.
3. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten, men for hver gang måler vi posisjonen til elektronet ved spalten for å finne ut hvor det passerer.

d) Kommenter påstanden: «Dobbeltspalteeksperimentet med elektroner beviser at elektronet er en bølge.»

Oppgave2 Elektrondiffraksjon

I denne oppgaven skal du gjenta analysen fra Thomsons elektrondiffraksjon. George Paget Thomson mottok Nobelprisen i fysikk i 1937 for disse målingene og analysene. Prisen ble delt med Clinton Davisson (som utførte Davisson-Germer-eksperimentet sammen med Lester Germer), og begrunnelsen var "*for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals*".

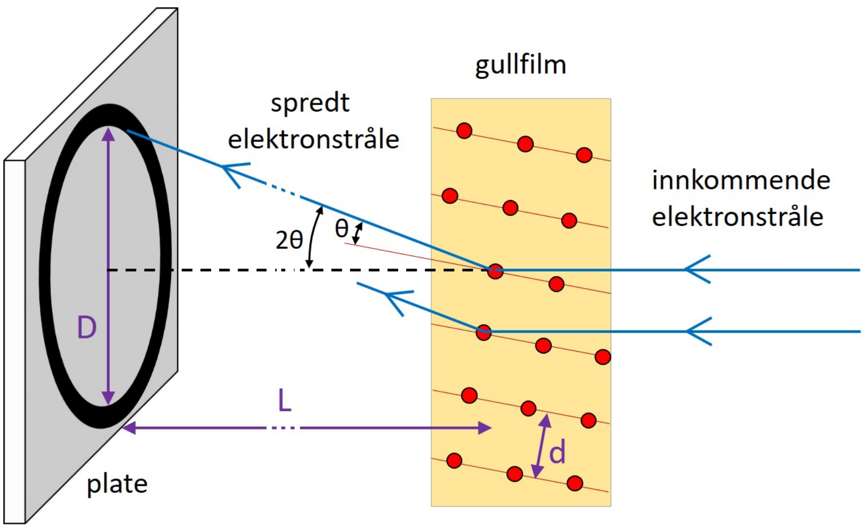
Elektroner akselereres gjennom et potensialfall på 30 tusen volt før de blir sendt gjennom en tynn gullfilm med tykkelse 10^{-6} cm. Gull har en atomlagavstand (gitterkonstant) på $d = 4.07$ Å. Spredningen av elektronstrålen blir



Figur 1: Eksperimentelt oppsett som ble brukt av Thomson. Bildene er fra boken "*A History of the Electron – J. J. and G. P. Thomson*", J. Navarro (Cambridge Univ Press, 2012).

registrert på en fotografisk plate som er plassert i en avstand $L = 40$ cm fra gullfilmen; se figur 1 og 2.

Resultatet fra eksperimentet viser at elektronene treffer den fotografiske platen i sirkulære mønstere, sentrerte på det punktet der ikke spredte elektroner treffer platen. Diameteren for den minste ringen er målt til $D = 1.36$ cm.



Figur 2: Illustrasjon av elektrondiffraksjon.

a) Finn de Broglie-bølgelengden λ til elektronet etter akselerasjon.

b) Finn sammenhengen mellom spredningsvinkel 2θ, avstanden L, og diameteren D. Beregn θ med denne formelen, og oppgi resultatet i grader.

c) Gjør nå antagelsen at mønsteret/ringene kan ha oppstått pga. interferens når elektronstrålen spres på forskjellige atomer i gullfilmen. Utled sammenhengen mellom spredningsvinkel θ, bølgelengde λ, og avstand d mellom atomlag når vi da kan forvente oss maksimal konstruktiv interferens. Du kan anta at spredte stråler er parallelle. Vis utledningen din sammen med en skjematisk figur.

d) *Forts.* fra oppgave **(c)**. Beregn minste vinkel θ for konstruktiv interferens, og oppgi den i grader. Sammenlign resultatet med oppgave **(b)**. Hva er konklusjonen, og hvilken egenskap til partikkelens tilstand er påvist gjennom eksperimentet, som var banebrytende nok til å gi en nobelpris?

Oppgave3 Partikkel i en uendelig dyp brønn; superposisjon

I denne oppgaven skal du studere to tilstander, $\Psi_{sp1}(x,t)$ og $\Psi_{sp2}(x,t)$, som begge er superposisjoner av energi-egentilstander for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn. Dvs, $V(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a = 0.867$ nm, ellers er $V(x) = \infty$. Egentilstandene har energiene E_n og de tidsuavhengige egenfunksjonene er $\psi_n(x)$.

a) Først, regn ut E_n til egentilstandene $n = 1, 2$ og 3, og oppgi dem i eV.

b) $\Psi_{sp1}(x,0) = A \cdot \{4\psi_1(x) + (3-i)\psi_2(x) + \psi_3(x)\}$. Normaliser bølgefunksjonen.

c) Skriv ned den tidsavhengige bølgefunksjonen $\Psi_{sp1}(x,t)$, og plott den for $0 \leq x \leq a$, og for $t = 0$ og 1 femtosekund.

d) Beregn forventningsverdien til $\hat{H}$ og tilsvarende standardavvik σ_H.

e) Hva er sannsynligheten for å måle energien $E = E_1$, og hva er sannsynligheten for å måle $E = E_1 + E_2$?

f) Anta nå at elektronet befinner seg i tilstanden $\Psi_{sp2}(x,0) = Ae^{x/a}$. Hva er sannsynligheten for at du måler energien $E = E_n$ til elektronet?

Oppgave4 Harmonisk oscillator

I denne oppgaven skal du studere den tidsuavhengige Schrödingerligningen (TUSL) for harmonisk oscillator med potensialet $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Løsningene er bølgefunksjoner på formen $e^{g(x)}$, der $g(x) = -m\omega x^2/2\hbar$.

Notasjon: $\psi_n' = \frac{d}{dx}\psi_n(x)$ og $\psi_n'' = \frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x)$.

a) Vis at $\psi_0(x) = Ae^{g(x)}$ er løsningen av TUSL med grunntilstandenergien $E_0 = \hbar\omega/2$, dvs. $\psi_0'' + (2m/\hbar^2)(E_0 - V)\psi_0 = 0$, og at følgende sammenheng gjelder:

$$g'' + (g')^2 + (2m/\hbar^2)\,(E_0 - V) = 0. \tag{1}$$

b) *Forts.* Vis at når $\psi_n(x) = h_n(x)\psi_0(x)$ er en løsning av TUSL, dvs. $\psi_n'' + (2m/\hbar^2)(E_n - V)\psi_n = 0$, så gjelder:

$$h_n'' + 2g'h_n' + (2m/\hbar^2)\,(E_n - E_0)\,h_n = 0. \tag{2}$$

Ligningen tilsvarer (2.79) på side 49 i Griffiths (eller [2.78] på side 52 i utgave 2), og $h_n(x)$ er da et Hermite-polynom av n-te grad.

c) Vis med hjelp av ligning (2) at $E_2 = \hbar\omega 5/2$ for $h_2(x) = (2m\omega/\hbar)x^2 - 1$.