FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2021
Hjemmeeksamen

Løsningsforslag

Oppgave1 Måling

a) Hvordan kan vi måle forventningsverdien $\langle x \rangle$? Velg ett alternativ og begrunn svaret.

1. Sett opp en serie av mange like partikler, og mål posisjonen til hver av dem og finn gjennomsnittet.
2. Mål posisjonen til den samme partikkelen igjen og igjen veldig mange ganger, og finn gjennomsnittet.

Svar: 1 er riktig. I alternativ 2 vil måling 1 kollapse bølgefunksjonen og de følgende målingene vil være påvirket av dette og vi vil ikke få den spredningen som er gitt av bølgefunksjonen, og snittet vil (mest sannsynlig) ikke sammenfalle med forventningsverdien.

b) I praksis finnes det ikke noe instrument som kan måle en partikkels bevegelsesmengde nøyaktig. Det gjelder også om vi ikke måler posisjonen i det hele tatt. Det vil alltid være en usikkerhet i målingen. Skyldes dette Heisenbergs uskarphetsrelasjon? Begrunn svaret.
Svar: Både ja og nei. På en måte er svaret nei, Heisenbergs uskarphetsrelasjon sier ikke noe om usikkerheten i én variabel. Den handler om forholdet mellom uskarpheter i to variabler. Utsagnet handler derfor mer om at det i praksis er umulig å måle helt nøyaktig, på grunn av begrensninger i måleinstrumenter. Samtidig kan man si at uskarphetsrelasjonen er relevant her fordi den sier at en skarp verdi av bevegelsesmengde krever en uendelig uskarphet i posisjon. I praksis må man vite noe om hvor en partikkel er for å kunne måle på den, for eksempel vil et måleinstrument ha en endelig utstrekning. Så på den måten handler det også om Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

c) Vi sender elektroner gjennom en dobbeltspalte og detekterer hvor de treffer på en skjerm bak dobbetspalten. Hvilket mønster får vi på skjermen i de ulike tilfellene under? Begrunn svaret:

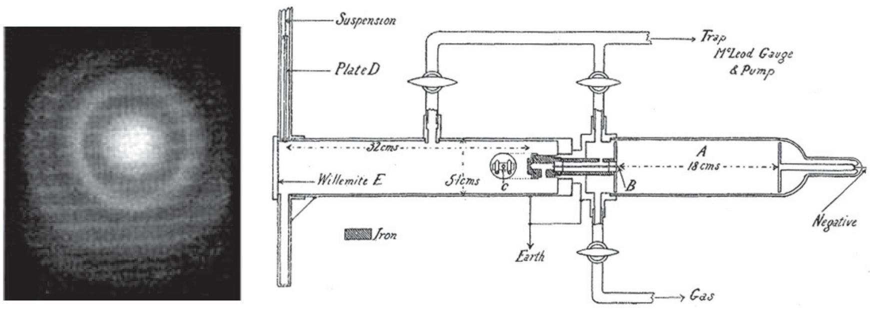
1. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten.
2. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten, men ett og ett i gangen.
3. Vi sender 1000 elektroner gjennom dobbeltspalten, men for hver gang måler vi posisjonen til elektronet ved spalten for å finne ut hvor det passerer.

Svar: (1) Interferensmønster. (2) Interferensmønster, det tar bare lenger tid å få det fram. (3) Ikke interferensmønster, men to parallelle streker/felter. En tolkning er at målingen ved spaltene kollapset bølgefunksjonen og ødela bølgeegenskapene til elektronene.

d) Kommenter påstanden: «Dobbeltspalteeksperimentet med elektroner beviser at elektronet er en bølge.»
Svar: Eksperimentet kan ikke bevise at elektronet *er* en bølge, men det viser at elektronets tilstand kan tilordnes bølgeegenskaper. Andre eksperimenter viser at tilstanden også kan tilordnes partikkelegenskaper, så elektronet oppfører seg i alle fall ikke kun som en klassisk bølge, eller kun som en klassisk partikkel.

Oppgave2 Elektrondiffraksjon

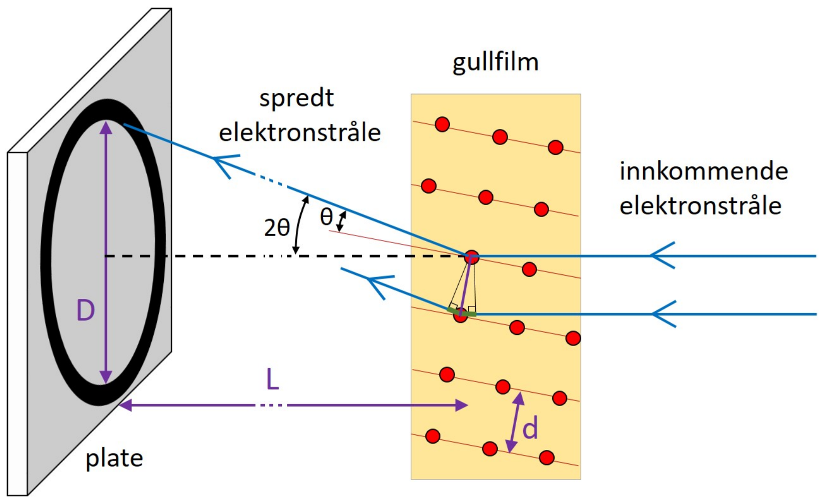
I denne oppgaven skal du gjenta analysen fra Thomsons elektrondiffraksjon. George Paget Thomson mottok Nobelprisen i fysikk i 1937 for disse målingene og analysene. Prisen ble delt med Clinton Davisson (som utførte Davisson-Germer-eksperimentet sammen med Lester Germer), og begrunnelsen var "*for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals*".



Figur 1: Eksperimentelt oppsett som ble brukt av Thomson. Bildene er fra boken "*A History of the Electron – J. J. and G. P. Thomson*", J. Navarro (Cambridge Univ Press, 2012).

Elektroner akselereres gjennom et potensialfall på 30 tusen volt før de blir sendt gjennom en tynn gullfilm med tykkelse 10^{-6} cm. Gull har en atomlagavstand (gitterkonstant) på $d = 4.07$ Å. Spredningen av elektronstrålen blir registrert på en fotografisk plate som er plassert i en avstand $L = 40$ cm fra gullfilmen; se figur 2.

Resultatet fra eksperimentet viser at elektronene treffer den fotografiske platen i sirkulære mønstere, sentrerte på det punktet der ikke spredte elektroner treffer platen. Diameteren for den minste ringen er målt til $D = 1.36$ cm.



Figur 2: Illustrasjon av elektrondiffraksjon.

a) Finn de Broglie-bølgelengden λ til elektronet etter akselerasjon.
Svar: $K = 30$ keV og $m_e c^2 = 511$ keV.
Test: $K \sim m_e c^2\, v^2/2c^2$ gir at $v/c \sim 0.34 \Rightarrow$relativistisk beregning.
$pc = \sqrt{K^2 + 2Km_e c^2}$ gir $\lambda = hc/pc = 0.0070$ nm.

b) Finn sammenhengen mellom spredningsvinkel 2θ, avstanden L, og diameteren D. Beregn θ med denne formelen, og oppgi resultatet i grader.
Svar: $\tan 2\theta = (D/2)/L$. $\theta = \arctan(1.36/2/40)/2 = 0.0085 = 0.49°$.

c) Gjør nå antagelsen at mønsteret/ringene kan ha oppstått pga. interferens når elektronstrålen spres på forskjellige atomer i gullfilmen. Utled sammenhengen mellom spredningsvinkel θ, bølgelengde λ, og avstand d mellom atomlag når vi da kan forvente oss maksimal konstruktiv interferens. Du kan anta at spredte stråler er parallelle. Vis utledningen din sammen med en skjematisk figur.
Svar: $n\lambda = 2d\sin\theta$, dvs Braggs lov. Undre strålen går en strekning som er $d\sin\theta + d\sin\theta$ lengre (grønn linje i figur 2) enn øvre strålen. Slik som Braggdiffraksjon (figur 4.6 i kompendiet og forelesning 4).

d) *Forts.* fra oppgave **(c)**. Beregn minste vinkel θ for konstruktiv interferens, og oppgi den i grader. Sammenlign resultatet med oppgave **(b)**. Hva er konklusjonen, og hvilken egenskap til partikkelens tilstand er påvist gjennom eksperimentet, som var banebrytende nok til å gi en nobelpris?
Svar: $n = 1$ gir minste vinkel. $\theta = \arcsin(\lambda/2d) = 0.0086 = 0.49°$. Konklusjonen er at mønsteret/ringene oppstår pga interferens, og at elektronet har bølgeegenskaper.

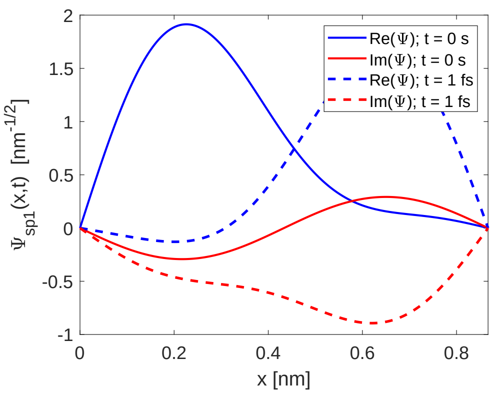
Oppgave3 Partikkel i en uendelig dyp brønn; superposisjon

I denne oppgaven skal du studere to tilstander, $\Psi_{sp1}(x,t)$ og $\Psi_{sp2}(x,t)$, som begge er superposisjoner av energi-egentilstander for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn. Dvs, $V(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a = 0.867$ nm, ellers er $V(x) = \infty$. Egentilstandene har energiene E_n og de tidsuavhengige egenfunksjonene er $\psi_n(x)$.

a) Først, regn ut E_n til egentilstandene $n = 1, 2$ og 3, og oppgi dem i eV.
Svar: $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2 = h^2c^2/8mc^2a^2 = (hc/mc^2)\cdot(hc/8a^2) = (1.240nm/511)\cdot(1240eV/8\cdot 0.867^2 nm) = 0.5$ eV. $E_2 = E_1 \cdot 2^2 = 2.0$ eV. $E_3 = E_1 \cdot 3^2 = 4.5$ eV.

b) $\Psi_{sp1}(x,0) = A\cdot\{4\psi_1(x) + (3-i)\psi_2(x) + \psi_3(x)\}$. Normaliser bølgefunksjonen.
Svar: ψ_n er ortogonale og normaliserte $\Rightarrow$
$1 = |A|^2 \cdot \{4^2 + |3-i|^2 + 1^2\} = |A|^2 \cdot \{16 + 10 + 1\} \Rightarrow A = 1/\sqrt{27}$

c) Skriv ned den tidsavhengige bølgefunksjonen $\Psi_{sp1}(x,t)$, og plott den for $0 \leq x \leq a$, og for $t = 0$ og 1 femtosekund.
Svar:
$\Psi_{st1}(x,t) = (1/\sqrt{27})\{4\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + (3-i)\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar} + \psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar}\}$
($E_n \cdot$ 1fs$/\hbar = n^2 0.5eV 10^{-15}$ s$/6.582\times 10^{-16}$ eVs $= 5/6.582 = 0.76n^2$)



Figur 3: Svar:Plott av $\Psi_{sp1}(x,t)$ i oppgave 3c). Her er både real- og imaginærdel plottet på x-aksen, slik som i løsningsforslag for oblig 5, men det går også bra å plotte f.eks. 3D-plott med realdel på x-aksen og imaginærdel på y-aksen.

d) Beregn forventningsverdien til $\hat{H}$ og tilsvarende standardavvik σ_H.
Svar: $\langle H \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n = E_1 \sum_n |c_n|^2 n^2 = 1.2$ eV

$\langle H^2 \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n^2 = E_1^2 \sum_n |c_n|^2 n^4 = 2.4$ eV
$\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = 0.96$ eV.

e) Hva er sannsynligheten for å måle energien $E = E_1$, og hva er sannsynligheten for å måle $E = E_1 + E_2$?
Svar: $|c_1|^2 = 16/27 = 59\%$, resp. 0%.

f) Anta nå at elektronet befinner seg i tilstanden $\Psi_{sp2}(x,0) = Ae^{x/a}$. Hva er sannsynligheten for at du måler energien $E = E_n$ til elektronet?
Svar: $1 = |A|^2 \int_0^a e^{2x/a}\, dx =$/Rottmann/ $=(e^2-1)a/2$.
$\Rightarrow A = \sqrt{2/a(e^2-1)}$.
$C \equiv A\sqrt{2/a} = (2/a)/\sqrt{e^2-1}$; $\lambda \equiv 1/a$; $b \equiv n\pi/a$
$c_n = \int_0^a \psi_n(x)^*\ \Psi_{sp2}(x,0)\, dx = C\int_0^a \sin{(bx)}\ e^{\lambda x}\, dx =$/Rottmann/
$= C(1/(\lambda^2+b^2))(\lambda e^{\lambda x}\sin bx - be^{\lambda x}\cos bx)|_0^a$
$= Cb(1-e\cos(n\pi))/(\lambda^2+b^2) = Can\pi(1-e\cdot\cos(n\pi))/(1+n^2\pi^2)$
$\Rightarrow |c_n|^2 = \frac{4n^2\pi^2}{(1+n^2\pi^2)^2}\frac{(e\cdot cos(n\pi)-1)^2}{(e^2-1)} = \frac{4n^2\pi^2}{(1+n^2\pi^2)^2}\frac{(e\cdot(-1)^n-1)^2}{(e^2-1)}$

Oppgave4 Harmonisk oscillator

I denne oppgaven skal du studere den tidsuavhengige Schrödingerligningen (TUSL) og bølgefunksjonen $e^{g(x)}$, der $g(x) = -m\omega x^2/2\hbar$ er løsningen for harmonisk oscillator med potensialet $V(x) = m\omega^2x^2/2$.

Notasjon: $\psi_n' = \frac{d}{dx}\psi_n(x)$ og $\psi_n'' = \frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x)$.

a) Vis at $\psi_0(x) = Ae^{g(x)}$ er løsningen av TUSL med grunntilstandenergien $E_0 = \hbar\omega/2$, dvs. $\psi_0'' + (2m/\hbar^2)(E_0 - V)\psi_0 = 0$, og at følgende sammenheng gjelder:

$$g'' + (g')^2 + (2m/\hbar^2)\,(E_0 - V) = 0. \tag{1}$$

Svar: $g' = -m\omega x/\hbar$; $(g')^2 = m^2\omega^2x^2/\hbar^2$; $g'' = -m\omega/\hbar$.
$-m\omega/\hbar + m^2\omega^2x^2/\hbar^2 + (2m/\hbar^2)(E_0 - m\omega^2x^2/2) = 0$
$\Rightarrow -m\omega/\hbar + (2m/\hbar^2)E_0 \Rightarrow E_0 = \hbar\omega/2$.

Alternativ løsning for sammenheng:
TUSL: $\frac{d^2}{dx^2}Ae^{-m\omega x^2/2\hbar} + (2m/\hbar^2)(E_0 - V)Ae^{-m\omega x^2/2\hbar} = 0$
$\frac{d}{dx}(-m\omega x/\hbar)e^{-m\omega x^2/2\hbar} + (2m/\hbar^2)(E_0 - V)e^{-m\omega x^2/2\hbar} = 0$
$(-m\omega/\hbar + (-m\omega x/\hbar)^2)e^{-m\omega x^2/2\hbar} + (2m/\hbar^2)(E_0 - V)e^{-m\omega x^2/2\hbar} = 0$
$-m\omega/\hbar + (-m\omega x/\hbar)^2 + (2m/\hbar^2)(E_0 - V) = 0$
Identifiere at $g' = -m\omega x/\hbar$ og $g'' = -m\omega/\hbar$

Alternativ løsning for sammenheng:
$\psi' = g'\psi$; $\psi'' = g''\psi + g'\psi' = g''\psi + g'g'\psi = \{g'' + (g')^2\}\psi$
TUSL $\Rightarrow \{g'' + (g')^2 + (2m/\hbar^2)(E - V)\}\psi = 0$.

b) *Forts.* Vis at når $\psi_n(x) = h_n(x)\psi_0(x)$ er en løsning av TUSL, dvs. $\psi_n'' + (2m/\hbar^2)(E_n - V)\psi_n = 0$, så gjelder:

$$h_n'' + 2g'h_n' + (2m/\hbar^2)(E_n - E_0)\,h_n = 0. \tag{2}$$

Ligningen tilsvarer (2.79) på side 49 i Griffiths (eller [2.78] på side 52 i utgave 2), og $h_n(x)$ er da et Hermite-polynom av n-te grad.
Svar: Utledningen står i Griffiths for $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$.
$\psi'' = h_n''\psi_0 + 2h_n'\psi_0' + h_n\psi_0'' =$ / fra **(a)** / $=$
$= h_n''\psi_0 + 2h_n'g'\psi_0 + h_n(2m/\hbar^2)(V - E_0)\psi_0 =$ / TUSL / $=$
$\Rightarrow h_n''\psi_0 + 2h_n'g'\psi_0 + h_n(2m/\hbar^2)(V - E_0)\psi_0 + (2m/\hbar^2)(E_n - V)h_n\psi_0 = 0$
$\Rightarrow h_n'' + 2h_n'g' + h_n(2m/\hbar^2)(E_n - E_0) = 0.$

c) Vis med hjelp av ligning (2) at $E_2 = \hbar\omega 5/2$ for $h_2(x) = (2m\omega/\hbar)x^2 - 1$.
Svar: $h_2' = 4m\omega x/\hbar$; $\quad h_2'' = 4m\omega/\hbar$; $\quad \Delta E_2 = E_2 - E_0$.
(2): $4m\omega/\hbar - 2(m\omega x/\hbar)(4m\omega x/\hbar) + (2m/\hbar^2)\Delta E_2(2m\omega x^2/\hbar - 1) = 0.$
$\Rightarrow 2\omega - 4m\omega^2x^2/\hbar + (\Delta E_2/\hbar)(2m\omega x^2/\hbar - 1) = 0$
$\Rightarrow \Delta E_2/\hbar = 2\omega$ og $(\Delta E_2/\hbar)(2m\omega/\hbar) = 4m\omega^2/\hbar \Rightarrow \Delta E_2 = 2\hbar\omega$
$\Rightarrow E_2 = 2\hbar\omega + \hbar\omega/2 = \hbar\omega 5/2$