FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2022
Hjemmeeksamen

Oppgave1 Kvantefysikkens historie

a) Gi noen eksempler på hvordan kvantefysikk og kvanteobjektene den beskriver (elektroner etc.) skiller seg fra klassisk fysikk og de makroskopiske objektene den beskriver.

b) Gjør rede for hovedtrekkene i minst tre eksperimenter som var viktige for utviklingen av kvantefysikken, og forklar hvordan resultatene fra eksperimentene bidro til nye modeller eller teorier i fysikk.

Oppgave2 Partikkel i en uendelig dyp brønn

I denne oppgaven skal du studere energi-egentilstandene for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn, og en superposisjon av disse. Potensialbrønnen er definert ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for} -a < x < a \\ \infty, & \text{ellers,} \end{cases} \tag{1}$$

så $V(x)$ er altså en jevn funksjon av x (slik den vi studerte i kapittel 2.6 i Griffiths). I hele denne oppgaven er $a = 0.614\,\text{nm}$.

Når man har et konstant potensial $V(x) = V$, vil egenfunksjonene som tilfredsstiller tiduavhengige Schrödinger-ligningen ha generell form $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, der $k = \sqrt{2m(E-V)}/\hbar$. Dersom partikkelen befinner seg i en potensialbrønn, foretrekker vi å bruke formen $\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.

a) Vis at for en uendelig dyp potensialbrønn, definert av ligning 1, så følger det av grensebetingelser at løsningene er

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 1, 3, 5, \ldots\infty \\ B\sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for} \quad n = 2, 4, 6, \ldots\infty, \end{cases} \tag{2}$$

med energiene $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}n^2$. Beregn E_n for $n = 1$, 2, 3 og 4, og oppgi dem i elektronvolt (eV).

b) Vis at ψ_1 er normalisert når $A = \sqrt{1/a}$, og at ψ_1 og ψ_2 er ortogonale på hverandre. Hint: Utnytt symmetrien.

c) Konstruer en superposisjon $\Psi(x,t)$ av energitilstander der sannsynligheten for å måle energiene E_1, E_2, E_3, og E_4 er henholdsvis 40, 30, 20 og 10 %. Det er tilstrekkelig å skrive ψ_n i uttrykket, men husk å inkludere tidsavhengigheten.

d) Forklar hva som skjer med den superponerte tilstanden $\Psi(x,t)$ når du måler energi. Hvilket resultat vil du få dersom du måler energien en gang til, rett etter den første målingen?

e) Plott sannsynlighetstettheten til $\Psi(x,t)$ fra oppgave 2c ved $t = 5\,\mathrm{fs}$ (femtosekunder). Plott også sannsynlighetstettheten etter en energimåling som resulterte i E_2. Husk enheter på aksene.

f) Beregn forventningsverdien $\langle H \rangle$ og standardavviket σ_H til Hamiltonoperatoren for superposisjonen $\Psi(x,t)$. Hva blir $\langle H \rangle$ og σ_H for tilstanden etter målingen i oppgave 2e? Beregn forventningsverdien $\langle p \rangle$ og standardavviket σ_p til bevegelsesmengden for tilstanden etter målingen.

Oppgave3 Harmonisk oscillator

Potensialet for en kvantemekanisk harmonisk oscillator er $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. I oblig 6 har du konstruert $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)\psi_0$ fra grunntilstanden $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$.

a) Vis at ψ_0 ikke er en egenfunksjon til operatoren for bevegelsesmengde. Hva betyr det for målinger av bevegelsesmengde på partikler i tilstanden ψ_0?

b) Bruk en egnet stigeoperator til å konstruere uttrykket for ψ_1 fra ψ_2. Husk at ψ_1 skal være normalisert.

Oppgave4 Kommutatorer

Denne oppgaven handler om kommutatorer, og $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{K}$ og $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$ er de vanlige operatorene for henholdsvis posisjon, bevegelsesmengde, kinetisk energi og total (kinetisk pluss potensiell) energi. Videre skal du bruke stigeoperatorene $\hat{a}_\pm$, samt grunntilstanden $\psi_0(x)$ og potensialet $\hat{V} = V(x)$ for en harmonisk oscillator som ble oppgitt i oppgave 3.

Generelt gjelder: $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{C}$, hvis $[\hat{A},\hat{B}]f(x) = \hat{A}\hat{B}f(x) - \hat{B}\hat{A}f(x) = \hat{C}f(x)$.

a) Hva er konsekvensen av at to operatorer ikke kommuterer, kvantefysisk sett?

b) Vis at $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$.

c) Vis at $[\hat{K}, \hat{p}] = 0$.

d) Vis at $[\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar \frac{dV}{dx}$.
Hint: bruk resultat fra forrige deloppgave for å forenkle litt.

e) Vis at $\hat{x} = x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$ og $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$, slik de blir brukt i eksempel 2.5 i Griffiths.

f) Bruk uttrykkene for $\hat{x}$ og $\hat{p}$ i oppgave 4e sammen med kommutatorforhold for stigeoperatorene, og vis at $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.