

---

# FYS2140 Kvantefysikk - Vår 2022

## Hjemmeeksamen

### Oppgave1 Kvantefysikkens historie

- a) Gi noen eksempler på hvordan kvantefysikk og kvanteobjektene den beskriver (elektroner etc.) skiller seg fra klassisk fysikk og de makroskopiske objektene den beskriver.

Svar:

- Energikvantisering; i mange kvantefysiske systemer kan energi bare anta visse diskrete verdier, i den makroskopiske verden er energi mer kontinuerlig fordelt.
- Statistisk fordeling i stedet for determinisme; i kvantefysikk har vi en bevegelsesligning (Schrödinger-ligningen) for bølgefunksjonen, som lar oss forutsi fordelingen av mange utfall for målinger på et system, ikke deterministisk prediksjon av enkeltutfall (som i klassisk fysikk).
- Bølge-partikkel-dualisme; kvantefysiske objekter og deres eksperimentelle oppførsel må beskrives av modeller som inkluderer både partikkelegenskaper og bølgeegenskaper.
- Superposisjon; i kvantefysikk kan en partikkel være i en tilstand som er en blanding av flere egentilstander (med hver sin energi). Slike tilstander kalles superposisjon. Gjør vi en måling av energien til en partikkel i superposisjon, tvinger vi systemet ned på den ene av tilstandene og måler den tilsvarende energien.
- Uskarphet; i kvantefysikken finnes det par av observerbare størrelser som ikke kan være skarpe samtidig. Det mest kjente paret er posisjon  $x$  og bevegelsesmengde  $p$ . Heisenbergs uskarphetsrelasjon gir et minstemål for produktet av spredningene i mulige målinger av  $x$  og  $p$  lik  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . Det fins uskarphetsrelasjoner for alle par av størrelser der operatorene til størrelsene ikke kommuterer. Dette handler ikke om måleusikkerhet eller at vi forstyrrer systemene ved å måle på dem, men om en grunnleggende uskarphet i naturen. En slik uskarphet finnes ikke i klassisk fysikk.
- (I tillegg: Paulis eksklusjonsprinsipp og sammenfiltrering gjennom brudd på lokal realisme)
- Andre relevante forskjeller mellom kvantefysikk og klassisk fysikk finnes, og har gitt uttelling hos studenter som har skrevet om dem.

- 
- b) Gjør rede for hovedtrekkene i minst tre eksperimenter som var viktige for utviklingen av kvantefysikken, og forklar hvordan resultatene fra eksperimentene bidro til nye modeller eller teorier i fysikk.

Svar:

- Hulromstråling (svartlegeme-stråling); det ble gjort målinger av frekvensfordelingen i elektromagnetisk stråling fra hulrom, for å simulere stråling fra et svart legeme. Hulrommet ble varmet opp til en viss temperatur slik at atomene skulle bli satt i svingninger og sende ut stråling. Et lite hull i veggene rundt hulrommet slapp ut stråling, og frekvensen til denne strålingen ble målt for ulike temperaturer inne i hulrommet. Klassisk fysikk forutsa at radiansen (hvor kraftig strålingen er) skulle gå mot uendelig for høye frekvenser. Det stemte ikke med målingene, som viste avtagende radians for høye frekvenser. Max Planck løste problemet ved å lage en modell der den elektromagnetiske strålingen hadde kvantisert energi  $\epsilon_n = nh\nu$ .
- Fotoelektrisk effekt; lys sendes inn mot en metallplate og elektroner blir sendt ut fra plata. Elektronene blir sendt ut i en krets der det også er et potensial som kan varieres. For ulik intensitet og frekvens på det innkommende lyset ble strømmen i kretsen målt, samt spenningen som skulle til for å stoppe strømmen av utsendte elektroner. Det siste ga et mål på den maksimale kinetiske energien til de utsendte elektronene. Det ble gjort tre observasjoner som ikke var forventet fra klassisk fysikk: (1) Den kinetiske energien til elektronene var uavhengig av intensiteten til lyset. I følge klassisk fysikk burde den kinetiske energien være proporsjonal med intensiteten. (2) Frekvensen til lyset måtte over en viss terskelverdi for at elektroner skulle bli sendt ut i hele tatt. I følge klassisk fysikk burde det sendes ut elektroner uansett frekvens, så lenge intensiteten i lyset var høy nok. (3) Utsendingen av elektroner startet momentant. I følge klassisk fysikk burde det ta litt tid fra lyset først falt inn på materialet, til elektronene får absorbert nok stråling til å slippe fri fra materialet. Ingen slik tidsforsinkelse ble observert. Albert Einstein forklarte den fotoelektriske effekten ved å bruke Plancks kvantiserings-hypotese. Han sa at energien i elektromagnetisk stråling er kvantisert i små pakker han kalte lyskvanter (senere kalt fotoner), med energi bestemt av frekvensen  $E = h\nu$ . I fotoelektrisk effekt blir disse lyskvantene fullstendig absorbert av elektroner i metallet, slik at energien går til å rive løs elektronet fra atomkjernen og (eventuelt) gi det kinetisk energi. Den fotoelektriske effekten bidro slik til å utvikle modeller der elektromagnetisk stråling har partikkelegenskaper.

- 
- Compton-spredning; energirike fotoner blir sendt mot en grafittplate, der strålingen spres. Bølgelengden i den spredte strålingen måles ved hjelp av et Bragg-spektrometer for ulike spredningsvinkler i grafitten. Målingene viste at den spredte strålingen hadde lenger bølgelengde enn den innkomne strålingen, og at det var en sammenheng mellom spredningsvinkel og bølgelengden i den spredte strålingen. Eksperimentene lot seg forklare ved å gi fotonene en ny partikkelegenskap, bevegelsesmengde, og bruke bevaring av bevegelsesmengde og spredningsvinkelen i beregninger av fotonenes vekselvirkning med elektroner i grafitten. På den måten bidro Compton-spredning med å utvikle de kvantefysiske modellene for elektromagnetisk stråling.
  - Røntgen-stråling; energirike elektroner sendes mot et metall, der bremses de ned pga. Coulomb-vekselvirkning og det blir sendt ut elektromagnetisk stråling i røntgenområdet. For en gitt kinetisk energi hos de innsendte elektronene viste målinger en minimumsverdi for bølgelengden til det utsendte lyset. Dette lot seg ikke forklare av klassisk elektromagnetisk bølgeteori, og bidro i utviklingen av modeller der energien i elektromagnetisk stråling er kvantisert.
  - Spektrallinjer fra grunnstoffer; fysikerne hadde lenge observert at lys utsendt fra glødende gasser av grunnstoff kom i diskrete linjespekter. Balmer og Rydberg klarte å lage en formel for de observerte bølgelengdene i hydrogenspekteret, men kunne ikke forklare hvorfor formelen så ut som den gjorde. Da Bohr lanserte sin atommodell, med en tung positivt ladd kjerne og negativt ladde elektroner i diskrete energibaner utenfor, viste det seg at hans teori forklarte formlene til Balmer og Rydberg. Kvantisering av energien i hydrogenatomet var innført og kvantefysikken tok et langt steg videre.
  - Dobbeltpalteeksperimentet med elektroner; elektroner sendes mot en dobbeltpalte og blir detektert på en skjerm bak spalten. På skjermen får man et interferensmønster, også om man sender ett og ett elektron mot spalten og skjermen slik at det er umulig for elektronene å vekselvirke med hverandre på veien. Interferensmønsteret kan ikke forklares med klassisk fysikk. Hvis elektrone ne gis en bølgelengde gitt av De Broglies formel  $\lambda = h/p$ , kan interferensmønsteret både forklares og forutsies. Dobbeltpalteeksperimentet bidro slik med å utvikle modeller der elektronet har bølgeegenskaper.
  - Davisson-Germer-eksperimentet; elektroner sendes mot en krystall og spres. De spredte elektronene treffer detektoren i et interferensmønster. Som i dobbeltpalteeksperimentet oppstår det

interferensmønster også om det sendes inn ett og ett elektron. Målingene kunne ikke forklare med klassisk fysikk, men lot seg forklare ved å gi elektronene bølgeegenskaper som i dobbeltspalteeksperimentet (se over).

- Andre relevante eksperimenter finnes, og har gitt uttelling hos studenter som har skrevet om dem.

### Oppgave2 Partikkel i en uendelig dyp brønn

I denne oppgaven skal du studere energi-egentilstandene for et elektron i en uendelig dyp potensialbrønn, og en superposisjon av disse. Potensialbrønnen er definert ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -a < x < a \\ \infty, & \text{ellers,} \end{cases} \quad (1)$$

så  $V(x)$  er altså en jevn funksjon av  $x$  (slik den vi studerte i kapittel 2.6 i Griffiths). I hele denne oppgaven er  $a = 0.614 \text{ nm}$ .

Når man har et konstant potensial  $V(x) = V$ , vil egenfunksjonene som tilfredsstiller tiduavhengige Schrödinger-ligningen ha generell form  $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ , der  $k = \sqrt{2m(E - V)}/\hbar$ . Dersom partikkelen befinner seg i en potensialbrønn, foretrekker vi å bruke formen  $\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ .

- a) Vis at for en uendelig dyp potensialbrønn, definert av ligning 1, så følger det av grensebetingelser at løsningene er

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for } n = 1, 3, 5, \dots, \infty \\ B \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), & \text{for } n = 2, 4, 6, \dots, \infty, \end{cases} \quad (2)$$

med energiene  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} n^2$ . Beregn  $E_n$  for  $n = 1, 2, 3$  og  $4$ , og oppgi dem i elektronvolt (eV).

Svar:  $\psi_n(\pm a) = 0$ , da  $\cos(\pm \text{odde} \cdot \pi/2) = 0$  og  $\sin(\pm \text{jevne} \cdot \pi/2) = 0$ .  
 $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{2a^2}$ ;  $E_n = 0.25n^2 = 0.25, 1.00, 2.25, \text{ og } 4.00 \text{ eV}$ .

Alt. løsn.  $x - a \rightarrow x$ ,  $L = 2a$ , og bruk løsning i Griffiths som gir:  
 $\sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L + n\pi a/2a) = \sqrt{1/a} \sin(n\pi x/2a + n\pi/2)$ .

- b) Vis at  $\psi_1$  er normalisert når  $A = \sqrt{1/a}$ , og at  $\psi_1$  og  $\psi_2$  er ortogonale på hverandre. **Hint: Utnytt symmetrien.**

Svar:  $\int \psi_1^* \psi_1 dx = \frac{1}{a} \int \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)^2 dx = \frac{1}{2a} [1 + \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)]_{-a}^a = 1$ .  
 $\cos(ax)$  er jevn og  $\sin(bx)$  er odde funksjon  $\Rightarrow \int_{-a}^a \psi_1^* \psi_2 dx = 0$ .

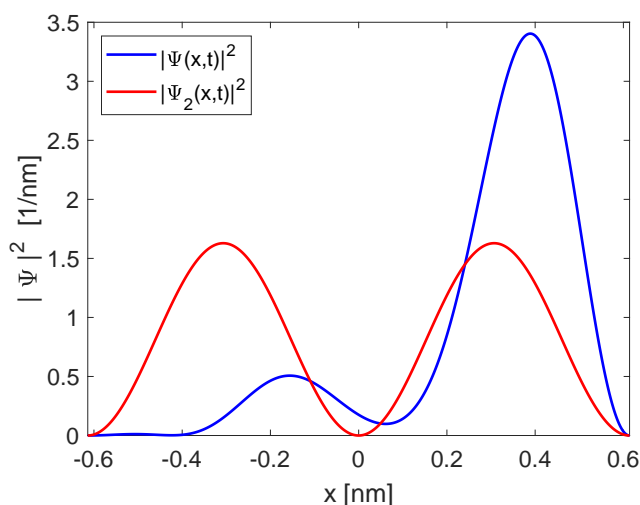
- c) Konstruer en superposisjon  $\Psi(x, t)$  av energitilstander der sannsynligheten for å måle energiene  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , og  $E_4$  er henholdsvis 40, 30, 20 og 10 %. Det er tilstrekkelig å skrive  $\psi_n$  i uttrykket, men husk å inkludere tidsavhengigheten.

Svar: F. eks.,  $\Psi(x, t) = \sqrt{0.4}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{0.3}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} + \sqrt{0.2}\psi_3 e^{-iE_3 t/\hbar} + \sqrt{0.1}\psi_4 e^{-iE_4 t/\hbar}$ .

- d) Forklar hva som skjer med den superponerte tilstanden  $\Psi(x, t)$  når du måler energi. Hvilket resultat vil du få dersom du måler energien en gang til, rett etter den første målingen?

Svar: Den "kollapser" til en egentilstand  $\psi_n$  med sin energi. Samme tilstand og energi som ved første målingen.

- e) Plott sannsynlighetstettheten til  $\Psi(x, t)$  fra oppgave 2c ved  $t = 5$  fs (femtosekunder). Plott også sannsynlighetstettheten etter en energi-måling som resulterte i  $E_2$ . Husk enheter på aksene.



- f) Beregn forventningsverdien  $\langle H \rangle$  og standardavviket  $\sigma_H$  til Hamiltonoperatoren for superposisjonen  $\Psi(x, t)$ . Hva blir  $\langle H \rangle$  og  $\sigma_H$  for tilstanden etter målingen i oppgave 2e? Beregn forventningsverdien  $\langle p \rangle$  og standardavviket  $\sigma_p$  til bevegelsesmengden for tilstanden etter målingen.

Svar:  $\langle H \rangle = \sum E_n |c_n|^2 = E_1 \sum n^2 |c_n|^2 = 1.25$  eV;  $\langle H^2 \rangle = \sum E_n^2 |c_n|^2 = E_1^2 \sum n^4 |c_n|^2 = 2.94$  eV<sup>2</sup>;  $\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = 1.18$  eV.

Etter måling har vi tilstanden  $\psi_2$ , dvs.

$$\langle H \rangle = E_2 \text{ og } \sigma_H = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \psi_2^* (-i\hbar d/dx) \psi_2 dx = -i\hbar(\pi/a)(1/a) \int \sin(\pi x/a) \cos(\pi x/a) dx \\ &= -i\hbar(\pi/2a^2) \int_{-a}^a \sin(2\pi x/a) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= 2m\langle K \rangle = 2mE_2 = (\pi\hbar/a)^2, \text{ eller } \langle p^2 \rangle = \int \psi_2^* (-\hbar^2 d^2/dx^2) \psi_2 dx \\ &= (-\hbar^2(-(\pi/a)^2) \int \psi_2^* \psi_2 dx = (\pi\hbar/a)^2. \sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \pi\hbar/a. \end{aligned}$$

### Oppgave3 Harmonisk oscillator

Potensialet for en kvantemekanisk harmonisk oscillator er  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ .

I oblig 6 har du konstruert  $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) \psi_0$  fra grunntilstanden  $\psi_0 = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$ .

- a) Vis at  $\psi_0$  ikke er en egenfunksjon til operatoren for bevegelsesmengde. Hva betyr det for målinger av bevegelsesmengde på partikler i tilstanden  $\psi_0$ ?

$$\text{Svar: } \hat{p}\psi_0 = (-i\hbar)(-2ax)\psi_0 \neq \text{konstant ganger } \psi_0.$$

Du kan ikke måle skarpt/deterministisk verdi på bevegelsesmengden.

- b) Bruk en egnet stigeoperator til å konstruere uttrykket for  $\psi_1$  fra  $\psi_2$ . Husk at  $\psi_1$  skal være normalisert.

$$\text{Svar: } \hat{a}_- \psi_2 = \sqrt{2} \psi_1. \text{ La } A = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}, k = \frac{m\omega}{2\hbar}, \text{ og } C = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}.$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C(i\hat{p} + m\omega x)(4kx^2 - 1)Ae^{-kx^2} \\ &= AC(\hbar d/dx + 2\hbar kx)(4kx^2 - 1)e^{-kx^2} \\ &= AC\hbar((8k^2x^3 - 2kx)e^{-kx^2} + d/dx(4kx^2e^{-kx^2} - e^{-kx^2})) \\ &= AC\hbar(8k^2x^3 - 2kx + 8kx - 8k^2x^3 + 2kx)e^{-kx^2} \\ &= C\hbar(8kx)\psi_0 = \frac{\hbar}{2\sqrt{2\hbar m\omega}} \frac{8m\omega}{2\hbar} x\psi_0 = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x\psi_0 \end{aligned}$$

### Oppgave4 Kommutatorer

Denne oppgaven handler om kommutatorer, og  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{K}$  og  $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$  er de vanlige operatorene for henholdsvis posisjon, bevegelsesmengde, kinetisk energi og total (kinetisk pluss potensiell) energi. Videre skal du bruke stigeoperatorene  $\hat{a}_\pm$ , samt grunntilstanden  $\psi_0(x)$  og potensialet  $\hat{V} = V(x)$  for en harmonisk oscillator som ble oppgitt i oppgave 3.

Generelt gjelder:  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ , hvis  $[\hat{A}, \hat{B}]f(x) = \hat{A}\hat{B}f(x) - \hat{B}\hat{A}f(x) = \hat{C}f(x)$ .

- a) Hva er konsekvensen av at to operatører ikke kommuterer, kvantefysisk sett?

Svar: De kan ikke ha felles egenfunksjoner, og derfor ikke mulig å måle samtidig skarpe verdier på de fysiske størrelsene representert av de to operatorene.

b) Vis at  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ .

Svar:  $(-i\hbar(x \frac{d}{dx} f - \frac{d}{dx} x f)) = (-i\hbar(x \frac{d}{dx} f - x \frac{d}{dx} f - f)) = i\hbar f$   
se Griffiths ligning 2.51.

c) Vis at  $[\hat{K}, \hat{p}] = 0$ .

Svar:  $[\hat{K}, \hat{p}] \propto (\hat{p}^2 \hat{p} - \hat{p} \hat{p}^2) = 0$ ; se f.eks. forelesningsnotater.

d) Vis at  $[\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar \frac{dV}{dx}$ .

Hint: bruk resultat fra forrige deloppgave for å forenkle litt.

Svar: Fra forrige deloppgaven:  $[\hat{K} + \hat{V}, \hat{p}] = [\hat{V}, \hat{p}]$ .

La  $C = \frac{1}{2} m \omega^2 (-i\hbar)$ ,  $A = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4}$ ,  $k = \frac{m\omega}{2\hbar}$ , og  $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$ .

$[\hat{V}, \hat{p}] \psi_0 = C(x^2 \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} x^2) A e^{-kx^2} = C(x^2(-2kx) - (2x + x^2(-2kx))) A e^{-kx^2}$   
 $= -2Cx \psi_0 \Rightarrow [\hat{V}, \hat{p}] = -2Cx = (i\hbar) \frac{d}{dx} V$ .

Alt. løsn.:  $[\hat{V}, \hat{p}] = \frac{C}{-i\hbar} [\hat{x} \cdot \hat{x}, \hat{p}] = \frac{C}{-i\hbar} (\hat{x} [\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}] \hat{x}) = -2Cx$ .

Generell løsn.:  $[\hat{V}, \hat{p}] \psi = -i\hbar (V \frac{d}{dx} \psi - \frac{d}{dx} V \psi) = -i\hbar (V \frac{d}{dx} \psi - V \frac{d}{dx} \psi - \psi \frac{d}{dx} V) = i\hbar (\frac{dV}{dx}) \psi$ .

Det betyr  $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$  kun når  $dV/dx = 0$ , dvs., konstant potensial.

e) Vis at  $\hat{x} = x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)$  og  $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$ , slik de blir brukt i eksempel 2.5 i Griffiths.

Svar:  $\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (-i\hat{p} + m\omega x)$ ;  $\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (+i\hat{p} + m\omega x)$   
 $\hat{a}_+ + \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (2m\omega x)$ , og  $\hat{a}_+ - \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (-2i\hat{p}) \cdot (i/i)$

f) Bruk uttrykkene for  $\hat{x}$  og  $\hat{p}$  i oppgave 4e sammen med kommutatorforhold for stigeoperatorene, og vis at  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ .

Svar:  $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \frac{i\hbar}{2} ((\hat{a}_+ + \hat{a}_-)(\hat{a}_+ - \hat{a}_-) - (\hat{a}_+ - \hat{a}_-)(\hat{a}_+ + \hat{a}_-))$   
 $= \frac{i\hbar}{2} (\hat{a}_- \hat{a}_+ - \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+ - \hat{a}_+ \hat{a}_-)$   
 $= \frac{i\hbar}{2} (2\hat{a}_- \hat{a}_+ - 2\hat{a}_+ \hat{a}_-)$   
 $= \frac{i\hbar}{2} (2\hat{a}_- \hat{a}_+ - 2(\hat{a}_- \hat{a}_+ - 1)) = i\hbar$