
FYS2140 Kvantefysikk – Vår 2023

Hjemmeeksamen midt i semesteret

Oppgave1 Forventningsverdier og egentilstander

- a) Forklar hva forventningsverdien $\langle Q \rangle$ til en fysisk størrelse Q er, og skriv opp det matematiske uttrykket for å beregne en slik forventningsverdi i kvantemekanikken.
- b) Hva er den beste framgangsmåten for å måle forventningsverdien $\langle x \rangle$ av 1 og 2 under? Begrunn svaret.
1. Sett opp en serie av mange like partikler i samme tilstand, mål posisjonen til hver av dem og finn gjennomsnittet av målingene.
 2. Mål posisjonen til én partikkel i en gitt tilstand veldig mange ganger, og finn gjennomsnittet av målingene.
- c) Hvilke(t) av utsagnene under er riktig(e) og hvilke(t) er feil? Begrunn svaret.
1. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er lik 0, er også $\langle p \rangle$ lik 0.
 2. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er veldig liten, er $\langle p \rangle$ veldig stor.
 3. Hvis σ_p er lik 0, går σ_x mot uendelig.
 4. Hvis $\langle x^2 \rangle$ er lik 0, er også $\langle p^2 \rangle$ lik 0.
- d) En egentilstand for energi er en tilstand som tilfredsstiller den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n.$$

Vis at standardavviket til forventningsverdien for energi er lik null hvis partikkelen er i en slik tilstand.

- e) Hva kan du si om standardavviket til en vilkårlig fysisk størrelse Q hvis partikkelen er i en egentilstand for operatoren \hat{Q} som representerer den størrelsen?

Oppgave2 Bohrs atommodell

I denne oppgaven skal du studere Bohrs atommodell, samt de Broglies bidrag til modellen. Bruk ikke-relativistisk beregning i oppgaven.

- a) Hvilken antagelse i Bohrs atommodell resulterer i at elektronets energinivåer er diskrete? Hvordan bekrefter de Broglies hypotese den antagelsen?

-
- b) Hvor stor del av elektronets totale energi er potensiell energi og hvor stor del er kinetisk energi? Er disse forholdene avhengige av energinivå?
- c) Beregn farten v til elektronet i hydrogenatomet for energitilstandene $n = 1, 2$ og 3 . Oppgi resultatet i enheten c (lysfart). Kommenter på om det hadde vært nødvendig å regne relativistisk her.
- d) Beregn de Broglies bølgelengde for de tre tilstandene i oppgave 3c). Oppgi resultatet i enheten a_0 (Bohr-radius).

Oppgave3 Partikkel i en uendelig dyp brønn

Betrakt et elektron i en uendelig dyp brønn. Potensialet er definert ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (1)$$

Den generelle løsningen til den tidsavhengige Schrödinger-ligningen kan skrives som en lineærkombinasjon av energi-egentilstander

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2)$$

Se nå på en brønn med bredden $a = \pi$ nm, og en tilstand til elektronet som beskrives av følgende superposisjon av egentilstander med de tre laveste energiene:

$$\Psi_s(x, t) = A \left(1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + 2 \psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} + 3 \psi_3(x) e^{-iE_3 t/\hbar} \right).$$

- a) Vi har vist at normering av bølgefunksjonen er tidsuavhengig. Bestem koeffisientene c_n gjennom å normere bølgefunksjonen $\Psi_s(x, t)$ ved tiden $t = 0$. Du kan anta at A er reell og positiv.
HINT: Bruk at egentilstandene $\psi_n(x)$ er gjensidig ortonormale.
- b) Beregn forventningsverdien $\langle H \rangle$ og standardavviket σ_H for energien til tilstanden $\Psi_s(x, 0)$. Oppgi dem i elektronvolt (eV).
HINT: Beregningen kan bli enklere ved å bruke "nyttige konstanter", og at $E_n = E_1 n^2$ for partikkel i boks.
- c) Bruk $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$ og $\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ til å vise at $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

- d) Start fra den generelle løsningen i ligning (2), og vis at sannsynlighetstettheten kan skrives som

$$|\Psi(x, t)|^2 = \sum_n \sum_{m \geq n} c_m^* c_n \Omega_{mn}(x, t), \quad \text{der}$$

$$\Omega_{mn}(x, t) = \frac{2 - \delta_{mn}}{a} \left(\cos((m - n)k_1 x) - \cos((m + n)k_1 x) \right) \times \cos((m^2 - n^2)\omega_1 t),$$

og der δ_{mn} er Kronecker-delta.

HINT: Bruk $k_n = k_1 n$, $E_n = E_1 n^2$, resultatet fra c), og merk at $m \geq n$. Dette er en mer generell løsning på eksempel 2.1 i Griffiths og deloppgave 5b) i oblig 5, men utledningen er tilsvarende.

Anta nå at vi har lokalisert elektronet rundt midten av brønnen, $x_0 = a/2$, slik at tilstanden ved tiden $t = 0$ er beskrevet av bølgefunksjonen

$$\Psi_{x_0}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-|x - x_0|/\varepsilon}.$$

Vi antar videre at lokaliseringen er sterk, det vil si at ε er liten, slik at $\Psi_{x_0}(0, 0) = \Psi_{x_0}(a, 0) \approx 0$ ved brønnens vegger. Det betyr at vi kan integrere over hele rommet, fra $-\infty$ til ∞ .

- e) Plott $\Psi_{x_0}(x, 0)$ for $\varepsilon = 0.01a$. Plott også bølgefunksjonen for grunntilstanden ved $t = 0$. Husk enheter på aksene.
- f) Bestem sannsynligheten for at resultatet ved en måling av $\Psi_{x_0}(x, 0)$ blir energien til grunntilstanden, og beregn denne sannsynligheten for $\varepsilon = 0.01a$. Hvis en måling gir oss grunntilstandsenergien, hvordan vil elektronets bølgefunksjon se ut like etter målingen?

HINT: Det er lurt å gjøre en variabelsubstitusjon for $x - x_0$.

Oppgave4 Stigeoperatorer

Denne oppgaven handler om stigeoperatorene \hat{a}_+ og \hat{a}_- for en harmonisk oscillator. Ligning 2.68 i Griffiths (2.67 i versjon 2) sier at energitilstandene i en harmonisk oscillator kan skrives som

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_+)^n \psi_0,$$

der n er et positivt heltall og ψ_0 er grunntilstanden.

- a) Bruk tilsvarende teknikk som i Griffiths til å vise at

$$(\hat{a}_-)^n \psi_n = \sqrt{n!} \psi_0$$

for $n = 4$.

- b) Hva blir $(\hat{a}_-)^n \psi_0$?