FYS2140 Kvantefysikk – Vår 2023
Hjemmeeksamen midt i semesteret

Oppgave1 Forventningsverdier og egentilstander

a) Forklar hva forventningsverdien $\langle Q \rangle$ til en fysisk størrelse Q er, og skriv opp det matematiske uttrykket for å beregne en slik forventningsverdi i kvantemekanikken.

Svar: Forventningsverdien $\langle Q \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx$ til den fysiske størrelsen Q kan defineres som gjennomsnittet av gjentatte målinger av Q på et sett (ensemble) av identisk preparerte systemer (partikler). Altså er det ikke gjennomsnittet av gjentatte målinger på ett og samme system (én og samme partikkel). På en mer generalisert statistisk måte kan man si at forventningsverdien $\langle Q \rangle$ til den fysiske størrelsen Q er lik summen av alle mulige utfall av egenverdien Q ganget med sannsynligheten for å få den egenverdien.

b) Hva er den beste framgangsmåten for å måle forventningsverdien $\langle x \rangle$ av 1 og 2 under? Begrunn svaret.

1. Sett opp en serie av mange like partikler i samme tilstand, mål posisjonen til hver av dem og finn gjennomsnittet av målingene.
2. Mål posisjonen til én partikkel i en gitt tilstand veldig mange ganger, og finn gjennomsnittet av målingene.

Svar: 1 er riktig. I alternativ 2 vil måling 1 kollapse bølgefunksjonen og de følgende målingene vil være påvirket av dette og vi vil ikke få den spredningen som er gitt av bølgefunksjonen, og snittet vil (mest sannsynlig) ikke sammenfalle med forventningsverdien.

c) Hvilke(t) av utsagnene under er riktig(e) og hvilke(t) er feil? Begrunn svaret.

1. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er lik 0, er også $\langle p \rangle$ lik 0.
2. Hvis $\langle x \rangle$ for en tilstand er veldig liten, er $\langle p \rangle$ veldig stor.
3. Hvis σ_p er lik 0, går σ_x mot uendelig.
4. Hvis $\langle x^2 \rangle$ er lik 0, er også $\langle p^2 \rangle$ lik 0.

Svar:

1. Påstanden er riktig. Ehrenfests teorem innebærer at forventningsverdier i kvantemekanikken følger den klassiske fysikkens lover.

Det betyr at $\langle p \rangle = \langle mv \rangle = m\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, og dermed at $\langle p \rangle = 0$ hvis $\langle x \rangle = 0$. Her forventer vi ikke utledning fra Ehrenfests teorem for å gi full pott.

2. Påstanden er feil. Det at forventningsverdien $\langle x \rangle$ er liten forteller ingenting om størrelsen på forventningsverdien $\langle p \rangle$. Det finnes imidlertid et forhold mellom standardavvikene σ_x og σ_p gitt av Heisenbergs uskarphetsrelasjon.
3. Påstanden er riktig, på grunn av Heisenbergs uskarphetsrelasjon $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$.
4. Påstanden er feil. Selv om $\langle x^2 \rangle$ skulle være lik 0, trenger ikke $\langle p^2 \rangle$ være lik 0. Ehrenfests teorem vil ikke føre til en slik sammenheng for $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$, selv om det er tilfelle for $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ (jf. den første påstanden), og det finnes dermed heller ingen etablert sammenheng fra klassisk fysikk som gjennom Ehrenfests teorem kan vises å gjelde for $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$. Her forventer vi ikke utledning fra Ehrenfests teorem for å gi full pott.

d) En egentilstand for energi er en tilstand som tilfredsstiller den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$\hat{H}\,\psi_n = E_n\,\psi_n.$$

Vis at standardavviket til forventningsverdien for energi er lik null hvis partikkelen er i en slik tilstand.

Svar: $\langle H \rangle = \int \psi_n^* \hat{H}\,\psi_n\,dx = E_n \int \psi_n^* \psi_n\,dx = E_n$.
$\langle H^2 \rangle = \int \psi_n^* \hat{H}\hat{H}\,\psi_n\,dx = E_n \int \psi_n^* \hat{H}\psi_n\,dx = E_n^2$.
$\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E_n^2 - E_n^2} = 0$.

e) Hva kan du si om standardavviket til en vilkårlig fysisk størrelse Q hvis partikkelen er i en egentilstand for operatoren $\hat{Q}$ som representerer den størrelsen?

Svar: Sammenhengen fra oppgave d) der standardavviket til forventningsverdien for energi er lik null hvis partikkelen er i en egentilstand for energi, gjelder også generelt for andre observerbare størrelser enn energi. Gitt en observerbar størrelse Q med operator $\hat{Q}$, og en tilstand ψ_n som er en egentilstand for $\hat{Q}$ med egenverdier q_n. Da er
$\langle Q \rangle = \int \psi_n^* \hat{Q}\,\psi_n\,dx = q_n \int \psi_n^* \psi_n\,dx = q_n$.
$\langle Q^2 \rangle = \int \psi_n^* \hat{Q}\hat{Q}\,\psi_n\,dx = q_n \int \psi_n^* \hat{Q}\psi_n\,dx = q_n^2$.
$\sigma_Q = \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2} = \sqrt{q_n^2 - q_n^2} = 0$.

Oppgave2 Bohrs atommodell

I denne oppgaven skal du studere Bohrs atommodell, samt de Broglies bidrag til modellen. Bruk ikke-relativistisk beregning i oppgaven.

a) Hvilken antagelse i Bohrs atommodell resulterer i at elektronets energinivåer er diskrete? Hvordan bekrefter de Broglies hypotese den antagelsen?

Svar: At angulærmomentet er kvantisert. De Broglies hypotese med grensebetingelsen $n\lambda = 2\pi r$ resulterer i kvantiserte angulærmomenter.

b) Hvor stor del av elektronets totale energi er potensiell energi og hvor stor del er kinetisk energi? Er disse forholdene avhengige av energinivå?

Svar: Ligning 3.6 og 3.7 i kompendiet viser at potensiell energi er negativ og dobbelt så stor som den totale energien (som er negativ). Det betyr at kinetisk energi er like stor som total energi, men positiv ... og ikke avhengig av energinivå.

c) Beregn farten v til elektronet i hydrogenatomet for energitilstandene $n = 1$, 2 og 3. Oppgi resultatet i enheten c (lysfart). Kommenter på om det hadde vært nødvendig å regne relativistisk her.

Svar: Ligning 3.5, 3.7 og 3.12 i kompendiet gir $mv^2/2 = 13.6/n^2$ [eV]. $v^2/c^2 = 27.2/(n^2mc^2) = 27.2/(n^2 0.511 \times 10^6) \Rightarrow v = \sqrt{27.2/0.511} \times 10^{-3}c/n = 0.0072$, 0.0036, og 0.0024 [c] for $n = 1$, 2 og 3.
Ikke nødvendig å regne relativistisk da $v/c < 0.01$.

d) Beregn de Broglies bølgelengde for de tre tilstandene i oppgave 3c). Oppgi resultatet i enheten a_0 (Bohr-radius).

Svar: $n\lambda = 2\pi r$ med $r = a_0 n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\pi$, 4π og 6π [a_0].

Oppgave3 Partikkel i en uendelig dyp brønn

Betrakt et elektron i en uendelig dyp brønn. Potensialet er definert ved

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } \ 0 \le x \le a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Den generelle løsningen til den tidsavhengige Schrödinger-ligningen kan skrives som en lineærkombinasjon av energi-egentilstander

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \tag{2}$$

Se nå på en brønn med bredden $a = \pi$ nm, og en tilstand til elektronet som beskrives av følgende superposisjon av egentilstander med de tre laveste energiene:

$$\Psi_s(x,t) = A\left(1\,\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + 2\,\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar} + 3\,\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar}\right).$$

a) Vi har vist at normering av bølgefunksjonen er tidsuavhengig. Bestem koeffisientene c_n gjennom å normere bølgefunksjonen $\Psi_s(x,t)$ ved tiden $t = 0$. Du kan anta at A er reell og positiv.
HINT: Bruk at egentilstandene $\psi_n(x)$ er gjensidig ortonormale.

Svar: $e^{-iE_n\,0/\hbar} = 1$. Normering gir $1 = \int \Psi^*(x,0)\,\Psi(x,0)\,dx$
$= \int (\sum_m c_m^* \psi_m^*)(\sum_n c_n \psi_n)\,dx = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \int \psi_m^* \psi_n \,dx$
$= \sum_n |c_n|^2 = A^2 \cdot (1+4+9) = A^2 \cdot 14 = 1$
$\Rightarrow \quad c_1 = 1/\sqrt{14}, c_2 = 2/\sqrt{14}$og $c_3 = 3/\sqrt{14}$.

b) Beregn forventningsverdien $\langle H \rangle$ og standardavviket σ_H for energien til tilstanden $\Psi_s(x,0)$. Oppgi dem i elektronvolt (eV).
HINT: Beregningen kan bli enklere ved å bruke ''nyttige konstanter'', og at $E_n = E_1\,n^2$ for partikkel i boks.

Svar:$E_1 = \hbar^2 c^2 \pi^2 / 2mc^2 a^2 = 197.3^2/(2 \cdot 0.511 \times 10^6) = 0.038$ eV.
$\langle H \rangle = \sum_n E_1\,n^2 \cdot |c_n|^2 = E_1 \sum_n n^4/14 = 0.27\,$eV.
$\langle H^2 \rangle = \sum_n (E_1\,n^2)^2 \cdot |c_n|^2 = E_1^2 \sum_n n^6/14 = 0.082\,\text{eV}^2$.
$\sigma_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = 0.11\,$eV.

c) Bruk $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$ og $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ til å vise at $2\sin\alpha\,\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

Svar: $2\sin\alpha\,\sin\beta = (-1/2)(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) =$
$(-1/2)(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} =$
$(-1/2)(-e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}) + (-1/2)(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)})$.

d) Start fra den generelle løsningen i ligning (**??**), og vis at sannsynlighetstettheten kan skrives som

$$|\Psi(x,t)|^2 = \sum_n \sum_{m\geq n} c_m^* c_n\, \Omega_{mn}(x,t), \quad \text{der}$$

$$\Omega_{mn}(x,t) = \tfrac{2-\delta_{mn}}{a}\Big(\cos\left((m-n)k_1\,x\right) - \cos\left((m+n)k_1\,x\right)\Big) \times \cos\left((m^2-n^2)\omega_1\,t\right),$$

og der δ_{mn} er Kronecker-delta.
HINT: Bruk $k_n = k_1 n$, $E_n = E_1 n^2$, resultatet fra c), og merk at $m \geq n$. Dette er en mer generell løsning på eksempel 2.1 i Griffiths og deloppgave 5b) i oblig 5, men utledningen er tilsvarende.

Svar: $\sum_n \sum_m c_m^* c_n \equiv \sum_{n,m} c_m^* c_n \equiv \sum_{n,m} b_{mn}$.

$|\Psi(x,t)|^2 = (\sum_m c_m\,\psi_m(x)e^{-iE_m t/\hbar})^* \sum_n c_n\,\psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} =$
$\sum_{n,m} c_m^* c_n \psi_m^* \psi_n e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} =$
$\sum_{n,m} b_{mn}(2/a)\ \sin\left(mk_1 x\right)\sin\left(nk_1 x\right)e^{i(m^2-n^2)w_1 t} = /$ oppgave c)/
$\sum_{n,m} b_{mn}(1/a)\ [\cos\left((m-n)k_1\,x\right) - \cos\left((m+n)k_1\,x\right)]\ e^{i(m^2-n^2)w_1 t}$.

For $m \neq n$:
$\sum_{n,m\neq n} b_{mn}e^{i(m^2-n^2)w_1 t} = \sum_{n,m>n} b_{mn}e^{i(m^2-n^2)w_1 t} + b_{nm}e^{-i(m^2-n^2)w_1 t}$.
Velg reelle c_m som betyr at $b_{mn} = b_{nm} \Rightarrow \sum_{n,m>n} b_{mn} 2\cos\left((m^2-n^2)\omega_1\,t\right)$.
For $m = n$:
$\sum_{n,m=n} b_{mn}e^{i(m^2-n^2)w_1 t} = \sum_{n,m=n} b_{mn}\,1, \quad$ og $1 = \cos\left((m^2-n^2)\omega_1\,t\right)$.

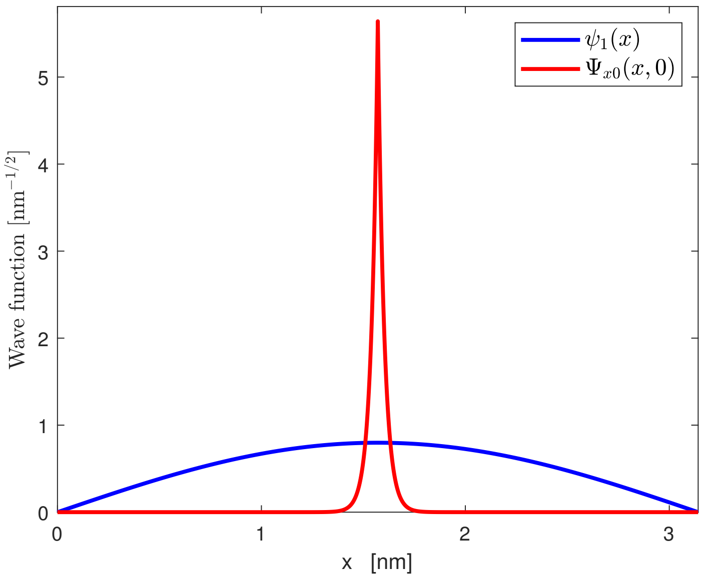
Kombiner $m \neq n$ og $m = n$:
$\sum_{n,m} b_{mn}e^{i(m^2-n^2)w_1 t} = \sum_{n,m\geq n} c_m^* c_n (2-\delta_{mn})\cos\left((m^2-n^2)\omega_1\,t\right)$.

Anta nå at vi har lokalisert elektronet rundt midten av brønnen, $x_0 = a/2$, slik at tilstanden ved tiden $t = 0$ er beskrevet av bølgefunksjonen

$$\Psi_{x_0}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-|x-x_0|/\varepsilon}.$$

Vi antar videre at lokaliseringen er sterk, det vil si at ε er liten, slik at $\Psi_{x_0}(0,0) = \Psi_{x_0}(a,0) \approx 0$ ved brønnens vegger. Det betyr at vi kan integrere over hele rommet, fra $-\infty$ til ∞.

e) Plott $\Psi_{x_0}(x,0)$ for $\varepsilon = 0.01a$. Plott også bølgefunksjonen for grunntilstanden ved $t = 0$. Husk enheter på aksene.



Figur 1: Plott til oppgave 3e).

f) Bestem sannsynligheten for at resultatet ved en måling av $\Psi_{x_0}(x,0)$ blir energien til grunntilstanden, og beregn denne sannsynligheten for $\varepsilon = 0.01a$. Hvis en måling gir oss grunntilstandsenergien, hvordan vil elektronets bølgefunksjon se ut like etter målingen?
HINT: Det er lurt å gjøre en variabelsubstitusjon for $x - x_0$.

Svar: $c_1 = \int_0^a \psi_1^*(x)\,\Psi_{x0}(x,0)\,dx = \sqrt{(2/a\varepsilon)}\int_0^a \sin(k_1 x)e^{-|x-x_0|/\varepsilon} \approx \sqrt{(2/a\varepsilon)}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(k_1(y+x_0))e^{-y/\varepsilon}\,dy = /\ k_1 \cdot x_0 = \pi/2\ / = \sqrt{(2/a\varepsilon)}\,2\int_0^{\infty}\cos(k_1\,y)e^{-y/\varepsilon}\,dy = Rottmann = \sqrt{(8/a\varepsilon)}\,\varepsilon/(1+\varepsilon^2 k_1^2)$.
$\Rightarrow \quad |c_1|^2 = (8\varepsilon/a)\,/(1+\varepsilon^2 k_1^2)^2$

For $\varepsilon = 0.01a$, $|c_1|^2 = 0.08 = 8\%$. Etter måling: $\psi_1(x)\varphi_1(t)$.

Oppgave4 Stigeoperatorer

Denne oppgaven handler om stigeoperatorene $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ for en harmonisk oscillator. Ligning 2.68 i Griffiths (2.67 i versjon 2) sier at energitilstandene i en harmonisk oscillator kan skrives som

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n\,\psi_0,$$

der n er et positivt heltall og ψ_0 er grunntilstanden.

a) Bruk tilsvarende teknikk som i Griffiths til å vise at

$$(\hat{a}_-)^n\,\psi_n = \sqrt{n!}\,\psi_0$$

for $n = 4$.

Svar: $(\hat{a}_-)^4\,\psi_4 = (\hat{a}_-)^3\,\hat{a}_-\psi_4 = \hat{a}_-^3\,\sqrt{4}\,\psi_3 = \hat{a}_-^2\,\sqrt{4}\sqrt{3}\,\psi_2 =$
$\hat{a}_-\,\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{2}\,\psi_1 = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{1}\,\psi_0 = \sqrt{4!}\,\psi_0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{a}_-)^n\,\psi_n = \sqrt{n!}\,\psi_0.$

b) Hva blir $(\hat{a}_-)^n\,\psi_0$?

Svar: $\hat{a}_-\,\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\hat{a}_-)^n\,\psi_0 = 0.$

Sensorveiledning for hjemmeeksamen midt i semesteret
FYS2140 Vår 2023

Til denne sensurveiledning er det laget et detaljert løsningsforslag som utgjør en viktig del av poengsettingen. Alle oppgaver blir rettet av to lærere/fagpersoner.

Oppgavene rettes med disse maksimale poeng per deloppgave:

1a	2	2a	2	3a	3	4a	4
1b	3	2b	3	3b	3	4b	2
1c	4	2c	3	3c	2		
1d	3	2d	3	3d	6		
1e	3			3e	3		
				3f	6		

Totalt er dette 55 poeng som skal tilsvare 20% av totalkarakter på kurset (avsluttende eksamen teller 80%). Vi vil derfor gange poengene som gis med faktoren 20/55.

- Det gis null poeng på deloppgaver hvis den ikke er besvart eller at besvarelsen ikke er relevant.
- Det gis fullt poeng på deloppgaver hvis det er i henhold til løsningsforslaget eller løst på annen fornuftig måte. Det skal ikke trekkes poeng hvis besvarelsen er besvart ved hjelp av matematisk/numerisk bevis, selv om det er uttrykt i oppgaveteksten «vis (uten regning) at så og så…» eller liknende.
- Det gis 1/3 ≈ 30% av fullt poeng hvis kandidaten er noe på vei mot riktig svar.
- Det gis 2/3 ≈ 70% av fullt poeng hvis kandidaten er nesten helt framme eller slurvefeil.
- Det gis 1/2 = 50% av fullt poeng hvis deloppgaven er halvferdig besvart.
- Det gis tilnærmet fullt poeng hvis tankemåten er riktig, men følgefeil.
- Det gis ikke tilleggspoeng for tilleggstekst som ikke er relevant for spørsmålet, selv om tekstens innhold er riktig isolert sett.
- Hvis det leveres tilleggstekst som det ikke ble spurt om og som avslører manglene innsikt, gis 90% av foreslått poeng.