UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Hjemmeeksamen i: FYS2140 Kvantefysikk
Dato: Mandag 18.mars kl. 09.00 til mandag 25.mars kl. 14.00 2024
Oppgavesettet er på: Totalt 7 sider, hvorav de 2 første sidene er informasjon om hjemmeeksamen
Tillatte hjelpemidler: Se neste side
Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Viktig info:

- Elektronisk innlevering via **Inspera** med frist mandag 25. mars 2024 kl. 14:00. Leveringsfristen er absolutt. Hjemmeeksamen teller 20% av karakteren i FYS2140. Ikke skriv navnet ditt på besvarelsen, innleveringen skal skje anonymt via Inspera.

- Innleveringen (pdf) må ha god kontrast. Hvis du har skriftlig levering, må håndskriften være tydelig lesbar på pdf-dokumentet.

- Vi ønsker klare og tydelige svar. Besvarelsen skal være pent og oversiktlig ført inn. Husk å bruke fornuftige enheter i utregningene.

- Ettersom dette er en hjemmeeksamen, har dere full anledning til å samarbeide, og til å bruke forelesningsnotater og annen faglitteratur for å finne fram til nødvendig informasjon. Man har også full anledning til å bruke GPT som hjelpemiddel. Svarene må likevel skrives med egne ord. Det lønner seg å være kritisk til GPT, da tjenesten ofte feiler på denne type oppgaver. Den innleverte besvarelsen skal være individuell, og vi forbeholder oss retten til å trekke ut noen av dere til en muntlig redegjørelse for besvarelsen deres senere.

- Dersom ChatGPT, GPT UiO etc. brukes i arbeidet med oppgaven, skal dere legge ved kommandoene dere skrev til språkmodellen på slutten av innleveringen.

- Noen av deloppgavene kan (bør) løses numerisk. Vi legger vekt på en kvalitativ beskrivelse av resultatene, men inkluder relevante plott og programkode i pdf-filen.

- Inspera tar bare ett dokument. Det er derfor viktig at alt materiale lastes opp **i én pdf-fil** inklusive eventuelle programkoder og annet som kan legges i slutten av pdf'en.

- Lykke til!

Oppgave 1 Lek med begreper

a) Comptoneffekten ble observert med røntgenstråler. Ville Compton klart å observere effekten (endring i bølgelengde) med synlig lys også? Grunngi svaret ditt.

b) Hvilke av størrelsene Ψ og $|\Psi|^2$ er målbare? Hvordan kan man eventuelt måle størrelsen?

A. Ingen av dem

B. Ψ

C. $|\Psi|^2$

D. Begge

c) Hvilke(n) påstand(er) stemmer? Begrunn svaret. En planbølge ...

A. er normerbar

B. er en løsning av Schrödingerlikningen for fri partikkel

C. representerer en tilstand med definert bevegelsesmengde

d) Anta at tilstanden til en partikkel er gitt ved

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(k) \exp(ikx) \mathrm{d}k, \tag{1}$$

hvor $\phi(k)$ er en Gaussisk funksjon med senterverdi k_0 og standardavvik Δk. Hva kan du si om partikkelens bevegelsesmengde og standardavviket til bevegelsesmengden? Vet vi noe om posisjonen og standardavviket til posisjonen i denne tilstanden?

e) Tenk på en partikkel med energi E som beveger seg i et potensiale $V(x)$. Hva er sant i en region der $E < V(x)$ om partikkelen er klassisk, og om partikkelen er kvantemekanisk? Forklar hvordan du tenker og diskutér svaralternativene.

A. Partikkelen kan aldri være i denne regionen

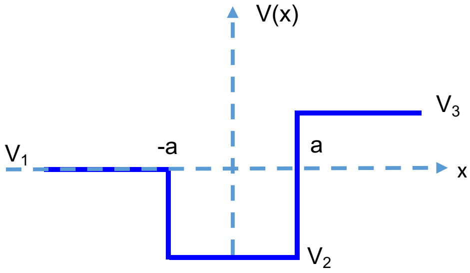
B. Partikkelen kan være der, men er "fanget"

C. Partikkel kan være der, og kan "slippe unna" til uendeligheten

f) Gitt 1D-potensialet i Fig. 1 hvor en partikkel sendes inn fra venstre mot høyre med tilhørende bølgefunksjon Ae^{ikx} og energi E bestemt av:

A. $V_1 < E < V_3$

B. $E > V_3$



Figur 1: Én-dimensjonalt potensial.

Skissér den reelle delen av bølgefunksjonen ($\mathcal{R}(\psi)$) i x-retning i de to tilfellene. Diskuter kvalitativt hvilke transmisjons- og refleksjonskoeffisienter som du forventer.

g) $\Psi_1(x,t)$ og $\Psi_2(x,t)$ er to forskjellige løsninger av den tidsavhengige Schrödingerlikningen (TASL). Er

$$\Psi_{\text{sum}}(x,t) = a\Psi_1(x,t) + b\Psi_2(x,t) \tag{2}$$

også en løsning av TASL? Forklar svaret ditt.

A. Ja, alltid
B. Nei, aldri
C. Avhenger av Ψ_1 og Ψ_2
D. Avhenger av koeffisientene a og b

Hva skjer med svaret ditt dersom $\Psi_1(x,t)$ og $\Psi_2(x,t)$ er to *normerte* løsninger av TASL?

Oppgave 2 Sort-legeme stråling – en lek med T, ν og λ

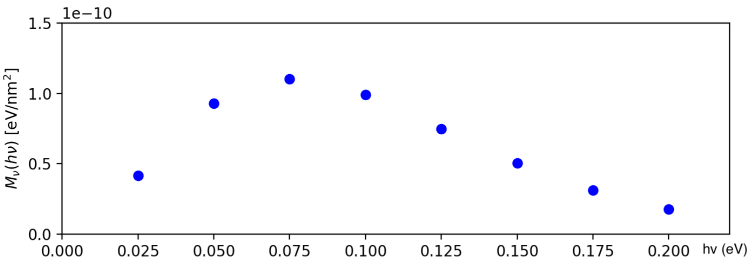
En student i kvantefysikk synes læreren ser febersyk ut og vil gjerne måle kroppstemperaturen hans. I stedet for å kjøpe et termometer på apoteket, konstruerer studenten et sinnrikt apparat for å måle lærerens sort-legeme stråling.

Tabell 1 og Fig. 2 viser de åtte datapunktene av $M_\nu(h\nu)$-fordelingen som ble målt. Studenten har vært ekstra nøye med å finne hvilken $h\nu$ som gir maksimal $M_\nu(h\nu)$, nemlig energien $(h\nu)_{\max} = 0.0753$ eV.

a) Finn middelverdien (forventningsverdien) $\langle h\nu \rangle$ og standardavviket $\sigma_{h\nu}$ for fordelingen M_ν når du vekter fotonenergiene med $w_i = M_\nu^i / \sum_{i=1}^{8} M_\nu^i$.

Tabell 1: Datapunkter målt av studenten.

hν [eV]	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200
M_ν $[10^{-11}\text{eV}/\text{nm}^2]$	4.15	9.31	11.04	9.92	7.47	5.05	3.10	1.78



Figur 2: Lærerens kroppsstråling som funksjon av $h\nu$.

b) Diskutér om $\langle h\nu \rangle$ og $\sigma_{h\nu}$-verdiene stemmer rimelig overens med M_ν fordelingen i Fig. 2.

c) Finn hvilken bølgelengde som tilsvarer fotoner med energi $(h\nu)_{\text{max}} = 0.0753$ eV.

d) Innsett bølgelengden fra c) i Wiens forskyvningslov, og vurder lærerens helsemessige tilstand.

e) Siden noe må være galt med tankegangen vår i oppgave d), vil vi undersøke videre. Plott den teoretiske fordelingen $M_\nu(h\nu)$ (Likn. (1.25) i kompendiet) for et legeme med temperatur 37 °C.

f) Er studentens datapunkter forenlige med den teoretiske fordelingen for temperatur 37 °C? Hvorfor får vi motstridende resultat i oppgave d)?

g) I kompendiet ble Wiens forskyvningslov og bestemmelse av λ_{max} utledet ved å forlange $dM_\lambda/d\lambda = 0$. I analogi med denne utledningen, sett $dM_\nu(h\nu)/d(h\nu) = 0$ og finn en relasjon mellom $(h\nu)_{\text{max}}$ og T. Her vil du måtte løse en likning numerisk (for eksempel ved hjelp av fsolve() i Python) eller ved grafisk metode. Vis at den nye relasjonen blir

$$(h\nu)_{\text{max}}/T = 2.431 \cdot 10^{-4} \text{ eV/K}, \tag{3}$$

hvor $(h\nu)_{\text{max}}$ er verdien ved maksimal M_ν.

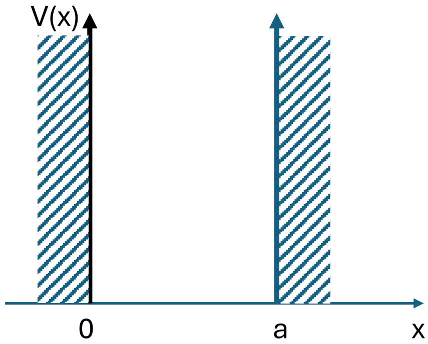
h) Finn temperaturen ved hjelp av den nye relasjonen i g) og vurdér om læreren er feberfri?

Oppgave 3 Partikkel i uendelig dyp potensialbrønn

En partikkel beveger seg fritt bortsett fra ved de to endene ($x = 0$ og $x = a$) hvor en uendelig kraft hindrer partikkelen fra å forsvinne. Potensialbrønnen kan beskrives som

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{ellers} \end{cases} . \tag{4}$$

og er illustrert i Fig. 3.



Figur 3: Uendelig kassebrønn-potensial.

a) Vis at den tidsuavhengige Schrödingerlikningen (TUSL) i denne potensialbrønnen kan skrives på formen

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \tag{5}$$

og definér k.

b) Vis at de romlige grensebetingelsene bare tillater sinus-løsning av TUSL.

c) Finn energiegenverdiene E_n hvor $n = 1, 2, 3 \ldots$

d) Finn energiegenfunksjonene $\psi_n(x)$ i potensialbrønnen og sørg for at de er normerte. Denne type funksjoner er også ortogonale. Beskriv på kompakt form hva ψ_m og ψ_n oppfyller hvis bølgefunksjonene er ortonormerte.

e) Argumentér for (uten å regne) hva forventningsverdiene $\langle x \rangle_n$ og $\langle p \rangle_n$ er for tilstanden $\psi_n(x)$. Tilfredsstiller disse forventningsverdiene Ehrenfests teorem?

Vi går nå over til å studere den tidsavhengige Schrödingerlikningen (TASL). Partikkelens bølgefunksjon ved tiden $t = 0$ er beskrevet som en sum av bølgefunksjonene til energiegenverdiene E_2 og E_3:

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\psi_2(x) - \psi_3(x)\right). \tag{6}$$

f) Bruk informasjonen om ψ_n fra oppgave d) og vis at $\Psi(x, t = 0)$ er normert.

g) Hva er sannsynligheten for å måle energiegenverdien E_2 eller E_3 ved én måling?

h) La $\omega \equiv \omega_1 = E_1/\hbar = \pi^2\hbar/2ma^2$, hvor E_1 er energiegenverdien for ψ_1. Ta utgangspunkt i Likn. (6) og skriv ned $\Psi(x, t)$ ved tiden t, uttrykt ved hjelp av vinkelhastigheten ω.

i) Vis at forventningsverdien av posisjonen som funksjon av tid blir

$$\langle x(t) \rangle = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{384}{125\pi^2}\cos(5\omega t)\right]. \tag{7}$$

Du får bruk for to typer integraler som vi oppgir her:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a}\int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx &= \frac{a}{2}, \ n = 1, 2, 3, \dots \qquad (8) \\ \frac{2}{a}\int_0^a x \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)dx &= -\frac{48a}{25\pi^2}. \end{aligned}$$

j) Bruk Ehrenfests teorem og finn forventningsverdien av bevegelsesmengden $\langle p(t) \rangle$ som funksjon av tiden.

k) La $a = 1$ nm og $m = 0.511$ MeV$/c^2$ og plott punktene $(\langle x(t) \rangle, \langle p(t) \rangle)$ for et helt omløp fra tiden $t = 0$ til $t = 2\pi/5\omega$. Forklar hva som skjer i løpet av et slikt omløp.