FYS 2150. ØVELSE 3

KONDENSATOREN OG RC-FILTRE

Fysisk institutt, UiO

Mål.

Etter å ha gått gjennom denne øvelsen, skal du kjenne til hvordan kondensatorer oppfører seg ved oppladning og utladning, og hvordan en kondensator og en motstand kan kombineres for å lage høypass- eller lavpass-filtre. Du skal vite hvilken betydning tidskonstanten har for et RC-filter og hvordan utgangsignalet fra filteret varierer med frekvensen. Du skal bli kjent med decibel-skalaen, og du skal kunne måle impedans, kapasitans og induktans for ulike komponenter.

Innledning : Kondensator og RC-kretser.

Også i denne øvelsen vil vi legge vekt på å observere, på registrering av observasjonene, og på gunstige måter å presentere resultater på. Men la oss starte med kondensatoren.

Den enkleste typen av kondensator er to metallplater atskilt av tomrom (luft). Den viktigste egenskapen til en kondensator er at den kan ”lagre” elektrisk *ladning*. Den ladningen Q som kan lagres er proporsjonal med spenningen V over platene, og proporsjonalitetskonstanten kalles kondensatorens kapasitans C.

Sammenhengen er dermed gitt som:

$$Q = C \cdot V$$

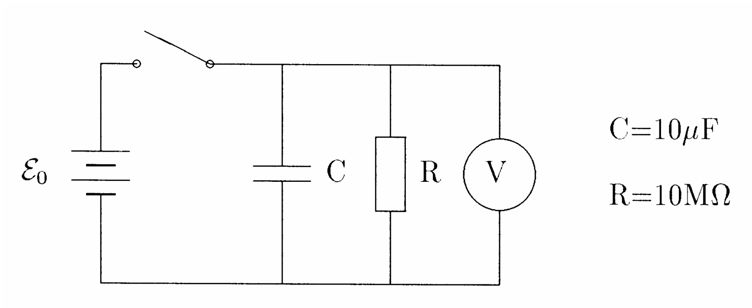
Enheten for kapasitans er Farad, F, (F = s/Ω = C/V). Er kapasitansen 1 μF og spenningen 1 V, vil altså ladningen på kondensatoren være 10^{-6} Coulomb.

I praksis brukes gjerne kondensatorer med glimmer eller et keramisk materiale mellom platene eller av to opprullete metallfolier som er isolert fra hverandre med en organisk film av polystyren, polyethylen eller polykarbonat. For større kapasitanser brukes ofte elektrolytiske kondensatorer. Disse må ha en bestemt polaritet på spenningen, ellers kan de gå varme og eksplodere. Polariteten og maksimal spenning står da avmerket på kondensatoren. Det finnes også flere typer variable kondensatorer hvor kapasitansen kan varieres.

Når vi kobler en kondensator (med kapasitans C) sammen med en motstand (med resistans R), får vi en RC-krets. Et eksempel på en slik krets er vist i figur 1. Hvis denne RC-kretsen tilkobles en likespenningskilde med spenning ε_0 som i figur 1, vil kondensatoren lades opp til en spenning $V_0 = \varepsilon_0$ og ha en ladning $Q_0 = CV_0$. Brytes forbindelsen til spenningskilden, vil ladningen på kondensatoren begynne å ”lekke” ut gjennom motstanden *R*. Ladningen på kondensatoren *C* avtar, og spenningen *V* synker. Teoretisk synker spenningen *V* med tiden etter en eksponentialfunksjon

$$V = V_0 \mathrm{e}^{-t/RC} = V_0 \mathrm{e}^{-t/t} \tag{1}$$

Størrelsen t = RC har dimensjon tid og kalles tidskonstanten for kretsen. Den angir hvor lang tid det tar for spenningen å synke fra verdien V' til verdien V'/e = 0.368 V'. Tidskonstanten er derfor et mål for hvor fort spenningen kan endres over RC-kretsen.



Figur 1: *En enkel RC-krets for måling av store tidskonstanter.*

Oppgave 1 : Tidskonstanten i en RC-krets.

Målingene i denne oppgaven gjøres på målestasjoner der det er utplassert nødvendig utstyr. Tidskonstanten i en RC-krets kan bestemmes ved å måle hvorledes en spenning *V* over kretsen varierer med tiden *t*. Anta at spenningen over kondensatoren er V_0 ved tiden *t*=0. Vi følger så spenningen mens denne avtar. Tar vi utgangspunkt i to målinger av spenning og tid: (V_1,t_1) og (V_2,t_2), får vi (likning 1):

$$V_1 = V_0 e^{-t_1/t} \quad \text{og} \quad V_2 = V_0 e^{-t_2/t}$$

Kombineres disse to måledataene, får vi:

$$V_1 / V_2 = e^{(t_2 - t_1)/t} \tag{2}$$

Tar vi logaritmen (naturlige) av dette uttrykket, følger:

$$\ln(V_1 / V_2) = (t_2 - t_1)/t \tag{3}$$

eller:

$$t = (t_2 - t_1)/\ln(V_1 / V_2) \tag{4}$$

Tidskonstanten kan altså bestemmes på grunnlag av bare to målinger. I denne oppgaven skal du imidlertid bruke en prosedyre der flere punkter avleses. På denne måten vil en oppnå mindre usikkerhet i τ ved grafisk utjevning.

Gangen i arbeidet er: Du lader opp en kondensator og følger så utladningen over en viss tid ved å lese av sammenhørende verdier av spenning og tid. Måleresultatene (V,t) skal tegnes inn på et enkeltlogaritmisk papir og tidskonstanten bestemmes ut fra diagrammet.

Du begynner med å koble opp RC-kretsen som vist i figur 1. *Kondensator og motstand allerede er koblet sammen på samme kloss*. Sett spenningskilden til 9 V. Vi har *ikke* noen virkelig bryter i kretsen. Forbindelsen med spenningskilden slutter og bryter du ved å koble en ledning inn eller fra. Voltmeteret som skal brukes er noe spesielt, med en operasjonsforsterker på inngangen. Inngangsmotstanden R_i blir da større enn 10^{10} MΩ.

♠ **For de mest interesserte:**

Hvorfor bruke operasjonsforsterker-voltmeter.
Grunnen til at en ikke kan bruke et vanlig digitalvoltmeter er at den indre resistansen i et vanlig voltmeter er 1—10 MΩ. Når motstanden i kretsen en måler på er av samme tørrelsesorden som resistansen i voltmeteret, vil betydelig del av strømmen i kretsen gå gjennom voltmeteret. Et ideelt voltmeter har uendelig stor indre motstand, slik at det ikke påvirker kretsen en måler på. Operasjonsforsterkeren har en inngangsmotstand R_i av størrelsesorden 10^{10} Ω, og voltmeteret med operasjonsforsterker kommer derfor for alle praktiske formål nær opp til det ideelle.

For å lese tiden skal du bruke en stoppeklokke hvor du kan ”fryse” displayet for avlesning mens klokka går videre. Be om veiledning dersom du er usikker på hvordan klokka skal brukes.

Koble inn spenningskilden og vent til spenningen over kondensatoren har stabilisert seg. *Bryt* så forbindelsen til spenningskilden (fjern ledningen til spenningskilden) slik at kondensatoren begynner å lades ut gjennom motstanden *R*. Start stoppeklokka når spenningen passerer første heltallige verdi, f.eks. 8V. Bestem så hvordan spenningen varierer med tiden. Velg selv hvordan og hvor ofte avlesningene skal skje for at du skal få fastlagt utladningsforløpet tilfredsstillende. Stopp når spenningen blir lavere enn 0.1V.

Dersom måleserien ble plottet på vanlig millimeterpapir, ville kurven vist et eksponentielt forløp, en funksjonssammenheng som er meget vanlig innen fysikken. Kurven ville være krum, og det ville ikke vært enkelt å trekke den ”beste” linje dersom usikkerheten er betydelig ved målingene. En eksponentiell kurve kan imidlertid med fordel tegnes inn på et *enkeltlogaritmisk* plott. Dividerer vi f.eks. likning 2 med V_{ref} = 1 V (nødvendig triks for å få ubenevnte tall), og tar logaritmen av det resulterende uttrykket, får vi:

$$\log(V/V_{ref}) = \log(V_0/V_{ref}) - \frac{\log(e)}{t}t$$

setter vi $y = \log(V/V_{ref})$, $a = -\log(e)/t$, $x = t$ og $b = \log(V_0/V_{ref})$, så kan likningen skrives på formen

$$y = ax + b$$

hvilket er en rett linje. Rette linjer er ofte lettere å tegne og å foreta grafisk utjevning på enn krumme linjer. Du skal derfor benytte et enkeltlogaritmisk papir når du skal lage grafen i denne oppgaven.

Plott opp måleserien på to dekaders enkeltlogaritmisk papir med tiden i lineær skala langs x-aksen og spenningen i logaritmisk skala langs y-aksen. (NB! *Stoppeklokka viser minutter og sekunder!*) Alle målepunktene bør stort sett å ligge langs en rett linje i dette plottet. Trekk den beste rette linje gjennom punktene og bruk to punkter, som ligger langt fra hverandre på denne linjen, til å bestemme tidskonstanten τ ved å bruke likning 4 ovenfor. (Ved briggske logaritmer (grunntall 10): $\log(x) = \ln(x)\cdot\log(e) = 0.434 \ln(x)$.)

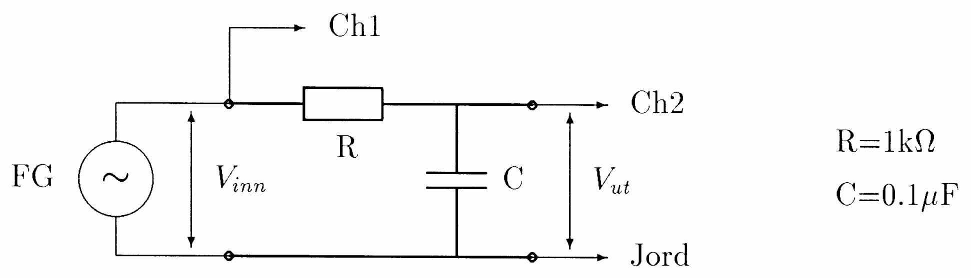
Noter de nominelle verdiene for R og C, og beregn den teoretiske verdien av tids-konstanten $t = RC$. Hvor god overensstemmelse er det mellom den teoretiske og den eksperimentelt bestemte tidskonstanten?

Oppgave 2 : Lavpassfilter.

Som du så i oppgave 1, tok det tid å lade opp eller lade ut en kondensator gjennom en motstand. Det er en viss treghet i kretsen. Kobler du motstanden og kondensatoren slik som vist i figur 3, kan en utnytte denne ”tregheten” til å lage et filter. Om vi sender vekselspenning inn på filteret, vil det ta tid før en endring i spenningen på inngangen vil gi en nevneverdig endring på utgangen. Resultatet er at raske variasjoner på inngangen har vanskelig for å komme gjennom filteret, mens langsomme endringer kommer lettere gjennom. Hva som regnes som raskt eller langsomt bestemmes av tidskonstanten. I denne oppgaven ønsker vi at du skal se hvordan et slikt lavpassfilter fungerer i praksis.

a) Lavpassfilter og firkantpulser.

Vi skal se på et oppsett der du kan se hvordan en spenningsendring på inngangen fører med seg et utladningsforløp på utgangen som ligner det vi så i oppgave 1. Vi bruker firkantpulser på inngangen, og du vil da se eksponentiell oppladning og utladning på utgangen. Vi kunne brukt utladningskurvene direkte for å bestemme tidskonstanten. Det skal vi ikke gjøre. Det vi vil vise er at amplituden på utgangssignalet vil avta med økende frekvens. Grunnen er at oppladning og utladning ikke blir fullstendig dersom periodetiden gjøres kortere enn tidskonstanten.



Figur 3: *Lavpassfilter.*

Koble opp som vist i figur 3. Oscilloskopets kanal 1 kobles til utgangen fra funksjonsgeneratoren, og kanal 2 kobles til punktet mellom C og R. (Måler spenningsforløpet over kondensatoren.) Sett funksjonsgeneratoren på firkantpulser, frekvens ca. 100 Hz og oscilloskopet i DC-koblet dual-mode slik at både firkantpulsen og spenningen over kondensatoren er synlig. Varier tidsbase-innstillingen slik at du ser litt over en hel periode av firkantpulsen. Sett følsomheten i y-retningen på 1V/div, og juster spenningen på funksjonsgeneratoren slik at amplituden er 3 V, dvs. 6 V mellom bunn og topp. Skisser V_{inn} og utladningskurven, V_{ut} , på "rutenett"-arkene som du finner i labben.

Merk at når vi skriver "skissér", så behøver du ikke bruke all verden med tid på tegningen. Det viktige er da at bildet blir gjengitt kvalitativt korrekt. Når to signal gjengis i samme figur (rutenett), vil det være en fordel om du bruker to forskjellige farger på de to signalene. Glem ikke å fortelle hvilket signal som er hva.

Du skal nå endre på frekvensen på innsignalet. Følg med i innstillingen av tidsbasen på oscilloskopet slik at du ser litt over en periode på skjermen. Skisser tidsforløpet for V_{inn} og V_{ut}, også for frekvensene 1 kHz og 10 kHz (lignende den skissen du laget for 100 Hz).

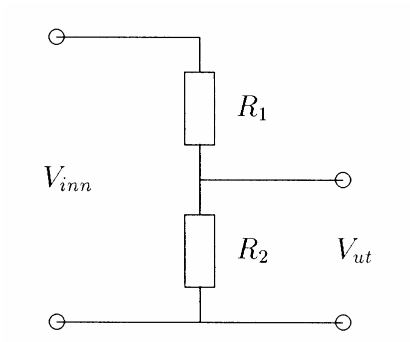
Beskriv det du observerer. Forsøk å forklare kvalitativt de endringene du ser i V_{ut} ved økende frekvens ut fra de verdier som er valgt for *R*, *C* og frekvensene (periodetidene).

TIPS: Det er minst to forskjellige måter å gi en "forklaring" på det du observerer:
Du kan bygge på at det tar tid å flytte ladning gjennom en motstand, og at ladningen på kondensatoren må endre seg for at spenningen skal endres. Spørsmålet blir da om signalet varierer så sakte at ladningen rekker å følge med fullt ut, eller om signalet varierer så raskt at ladningstransporten til og fra kondensatoren ikke blir tilstrekkelig raskt til at kondensatoren rekker å lade seg helt opp før polariteten på inngangen skifter.

En annen vanlig forklaringen bygger på en betraktning om spenningsdeling. En spenningsdeler kan illustreres som i figur 4. Spenningen V_{inn} settes over en seriekobling av to motstander R_1 og R_2. Utgangssignalet V_{ut} tas ut mellom de to motstandene. Dersom vi ikke belaster kretsen nevneverdig på utgangen, vil strømmen gjennom kretsen være $I = V_{inn}/(R_1+R_2)$ og følgelig vil spenningen over R_2 være gitt ved:

$$V_{ut} = V_2 = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{inn}$$

Dersom $R_2 >> R_1$, vil V_{ut} være temmelig lik V_{inn}, mens dersom $R_2 << R_1$, vil V_{ut} være nær null.



Figur 4: *Spenningsdeling ved hjelp av to motstander i serie.*

Uttrykket for spenningsdeling gitt ovenfor gjelder for alle frekvenser siden impedansen til en Ohmsk motstand ikke er frekvensavhengig.

Dersom vi bytter ut noen av motstandene i figur 4 med andre impedanser, f.eks. spoler eller kondensatorer, vil argumentasjonen bli temmelig lik den ovenfor. Dersom vi kun ser på impedansmodulen, kan uttrykket ovenfor brukes kvalitativt, men en må huske at en får et mer komplisert bilde fordi strøm og spenning ikke lenger nødvendigvis da er i fase.

La oss nå se på spenningsdelingen i forbindelse med lavpassfilteret. R_2 i figur 4 er nå erstattet av en kondensator med kapasitans C. Impedansen til kondensatoren er meget høy ved lave frekvenser, men avtar med høyere frekvenser (impedansmodulen til en kondensator er $|Z| = 1/(wC) = 1/(2pfC)$. Det betyr at ved lave frekvenser er spenningen over C langt større enn over R_1, og V_{ut} er tilnærmet lik V_{inn}.

Ved høye frekvenser er impedansen til kondensatoren meget liten, og spenningen over C blir langt lavere enn over R_1. I det tilfellet blir derfor V_{ut} mye mindre enn V_{inn}. Forholdet mellom spenningene avhenger av størrelsesforholdet mellom impedansene for motstanden R og for kondensatoren C. Når impedansene er omtrent like, har lavpass-filterets frekvenskarakteristikk sitt ”knekkpunkt”.

b) Lavpassfilterets frekvenskarakteristikk.

Kretsen i figur 3 danner et enkelt lavpassfilter. Amplituden på signalet som passerer filteret avtar ved høye frekvenser. I denne deloppgaven skal du foreta en registrering av hvordan filteret demper signalet som funksjon av frekvens.

Skift til harmonisk signal (sinus) og varier frekvensen fra 100 Hz opp til 100 kHz. Bestem inngangsspenningen (amplituden) V_{inn} og utgangsspenningen V_{ut} fra filteret for en del frekvenser. Det kan passe å bruke verdiene f ≈100 Hz, ≈300 Hz, ≈1000 Hz, ≈3000 Hz osv. oppover. Ta et par ekstra målinger i det området hvor V_{ut} endres raskt.

Tegn V_{ut} / V_{inn} som funksjon av frekvensen på fire dekaders enkelt-logaritmisk papir med frekvensen i logaritmisk skala langs x-aksen og V_{ut} / V_{inn} i lineær skala langs y-aksen. Du har da filterets frekvenskarakteristikk.

c) Filterets øvre grensefrekvens og beregning av tidskonstanten.

I forrige deloppgave fant du at frekvenskarakteristikken til lavpassfilteret hadde et ”platå” ved lave frekvenser, og avtok ved høye. Vi angir gjerne filterets grensefrekvens (f_{-3dB}) ved å oppgi den frekvensen der V_{ut} / V_{inn} har sunket med 3dB relativt til platåverdien (forklaring på decibel-skalaen er gitt som “nyttig tips” nedenfor). Det vil si:

$$\frac{(V_{ut}/V_{inn})_{-3dB}}{(V_{ut}/V_{inn})_{Platå}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \tag{5}$$

Tilsvarende kan vi operere med en annen grensefrekvens, (f_{-6dB}). For denne gjelder:

$$\frac{(V_{ut}/V_{inn})_{-6dB}}{(V_{ut}/V_{inn})_{Platå}} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

For harmonisk signal kan vi vise at grensefrekvensene for lavpassfilteret er nøye knyttet til tidskonstanten. Sammenhengen er:

$$t = \frac{1}{2pf_{-3dB}} \tag{7}$$

og

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2pf_{-6dB}} \tag{8}$$

Bestem frekvensene f_{-3dB} og f_{-6dB} fra frekvenskarakteristikken du nettopp fant, og beregn tidskonstanten t ut fra likningene ovenfor. Sammenlikn de to verdiene for t med den teoretiske verdien som du kan beregne ut fra de nominelle verdiene av R og C.

♥ **Nyttige tips:**

Decibel-skalaen.
Uttrykket dB (decibel) refererer seg til en logaritmisk skala, og den forteller oss om en *endring* i et signal. Sender vi for eksempel et signal med amplitude V_{inn} inn på en krets, og vi får et signal med amplitude V_{ut} ut fra kretsen, sier vi at kretsen demper signalet med et visst antall decibel, definert ved:

$$\text{Demping i dB} = 20 \cdot \log (V_{ut} / V_{inn}) \tag{9}$$

Dersom dempingen er -3dB finner vi:

$$20 \cdot \log (V_{ut} / V_{inn}) = -3.0 \approx -10 \cdot \log(2.0)$$

herav følger

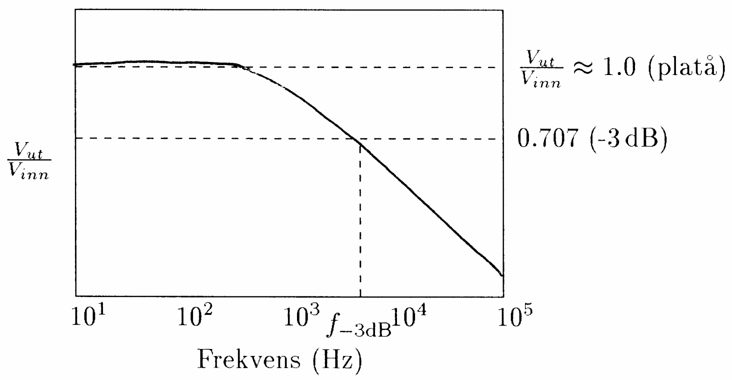
$$(V_{ut} / V_{inn})_{-3\text{dB}} = 1/\sqrt{2} = 0.707$$

Tilsvarende finner du for -6dB at

$$(V_{ut} / V_{inn})_{-6\text{dB}} = 1/2$$

Frekvensen $f_{3\text{dB}}$ kalles gjerne for grenseverdien for en krets (filter, forsterker osv.) fordi det tilsvarer at *effekten* er *halvert* relativt til referanseverdien. -3dB punktet er derfor det mest vanlige i tekniske data o.l. -6dB punktet er det ikke vanlig å bruke, men som du vil se i denne øvelsen, kan den forenkle målingene en del siden det er lettere å bestemme en amplitudeendring med faktor 0.5 enn en med faktor 0.707.

Men hvordan velger vi referanseverdien? I en frekvenskarakteristikk vil det gjerne finnes et frekvens-område der en eller annen parameter er forholdsvis konstant. Vi sier da at vi har et "platå". En reduksjon av parameteren på -3 dB beregnes i forhold til denne verdien. Dette er også vist i figur 5.



Figur 5: *Definisjon av grensefrekvensen f_{-3dB}.*

♠ **For de mest interesserte:**

I denne deloppgaven er du blitt presentert en måte du kan bruke for raskt å bestemme f.eks. en kapasitans (forutsatt at du har tilgjengelig en funksjonsgenerator og et oscilloskop). Kobler du opp den enkle kretsen i figur 3, og starter ut med en lav frekvens for å bestemme $(V_{ut} / V_{inn})_{\text{platå}}$, og øker frekvensen til V_{ut} / V_{inn} har sunket til halvparten av denne verdien, så har du bestemt f_{-6dB}. Siden $t = RC$ får vi da fra likning 8 at

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2pf_{-6dB}R}$$

Med litt trening kan denne bestemmelsen gjøres i løpet av et minutt eller to.

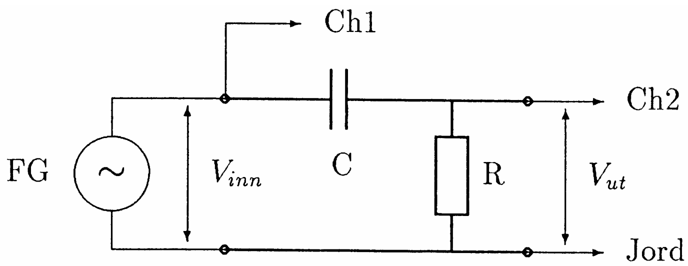
---

d) Faseforskjeller og frekvens.

Du har kanskje observert kvalitativt tidligere i denne oppgaven at det oppstår et faseskift mellom inngangssignalet og utgangssignalet i et lavpassfilter. Bestem faseforskyvningen mellom V_{ut} og V_{inn} ved $f_{\text{-3dB}}$. Sjekk deretter *kvalitativt* hvordan faseskiftet endrer seg med frekvensen. Er faseskiftet stort eller lite for frekvenser som tilsvarer platået i frekvenskarakteristikken? Og hva med faseskiftet for frekvenser der dempingen er stor?

Oppgave 3 : Høypassfilter.

Bytter kondensatoren og motstanden plass i forhold til slik det var i lavpassfilteret, får vi et høypassfilter, som vist i figur 6.



Figur 6: *Høypassfilter.*

a) Høypassfilteret og firkantpulser.

Koble opp som vist i figur 6. Start med firkantpulser med amplitude ca.1 V, og frekvens 100 Hz. Oscilloskopet må være DC koblet. Skisser V_{ut} sammen med V_{inn} i et ”rutenett”. Gjenta det samme for firkantpulser med frekvens 1 kHz og 10 kHz.

Kan du bruke betraktninger om at det tar en viss tid for at spenningen over kondensatoren kan endre seg, til å forklare signalforløpet på utgangen? Som et tips kan vi nevne at ”hviletilstanden” til systemet (”lenge” etter at det har skjedd noen endringer av inngangsspenningen) vil være 0 V på utgangen. (Enhver spenning over R vil føre til en strøm, dvs. ladningstransport, gjennom R inntil spenningen er eliminert, dvs $V_C = V_{inn}$.)

Kjenner du forresten igjen disse kurveformene fra øvelse 1 (Oscilloskopet), da du utforsket forskjellen på DC og AC kobling? Kan du nå foreslå hva som foregår når du skifter fra DC til AC kobling på oscilloskopet?

b) Høypassfilterets frekvenskarakteristikk.

Skift så til et harmonisk signal fra funksjonsgeneratoren, og ta opp høypassfilterets frekvenskarakteristikk på samme måte som i oppgave 2b. Tegn frekvenskarakteristikken inn i samme graf som i 2b. Hva blir filterets grensefrekvenser (f_{-3dB} og f_{-6dB})?

Kan du bruke betraktninger basert på spenningsdeling til å forklare kvalitativt hvorfor frekvenskarakteristikken til høypassfilteret ble slik som den ble?

♠ **For de mest interesserte:**

Litt om bruk av filtre.
Høypassfiltre benyttes ofte for å føre vekselspenninger fra et punkt til et annet uten at DC potensialet slipper gjennom. Dette møter du senere i en øvelse der vi bygger en transistorforsterker. Transistorens tilkoblingspunkter (base, emitter og kollektor) må ligge på bestemte likespenningsnivå i forhold til hverandre, og vi benytter da ofte kondensatorer for å beskytte disse likespenningsnivåene samtidig som vi slipper gjennom vekselspenningen.

Lavpassfiltre benyttes ofte for å fjerne høyfrekvenssignaler fra en kilde. Et meget vanlig eksempel er en spenningsforsyning. Dersom vi skal lage en likespenningskilde fra vårt 50 Hz nett, benyttes ofte likerettere. Signalet etter likerettingen vil ha komponenter av 50 eller 100 Hz, mens vi ønsker å ha en likespenningskilde så fri som mulig fra disse frekvenskomponentene. Dette gjør vi ved å sette inn et lavpassfilter med tidskonstant lavere enn 50 Hz (ofte store elektrolyttkondensatorer). Vi demper da 50 (eller 100) Hz komponenten, men lar likespenningen gå uhindret gjennom.

Settes et høypass og et lavpassfilter sammen, kan vi lage båndpassfiltre hvor bare frekvenser i et bestemt frekvensintervall får passere. Ved å bruke en variabel motstand i stedet for den faste motstanden i de to filtrene foran, kan vi lage tonekontroller for bass og diskant hvor en altså kan variere -3dB frekvensen.

I hele denne oppgaven har vi brukt det som kalles passive filtre som bare består av motstander og kondensatorer (og spoler). Det finnes en annen filtertype som kalles aktive filtre. Disse inneholder i tillegg til motstander og kondensatorer såkalte aktive kretselementer som transistorer og operasjonsforsterkere. Slike filtre kan lages slik at overgangen mellom de frekvensene som passerer og de som fjernes blir mye skarpere, og slike filtre er derfor mye brukt. En helt annen metode for filtrering finner en i digitale filtre.

Oppgave 4: Vekselstrøm og målinger av impedans

Sender vi *likestrøm* gjennom en motstand, gjelder Ohms lov: $I = \dfrac{V}{R}$. Strømmen er altså omvendt proporsjonal med resistansen *R*.

Sender vi *vekselstrøm* gjennom en motstand, får vi samme lovmessighet:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{R} \tag{10}$$

Merk at strømmen I kan, på samme måte som spenningen, karakteriseres ved en amplitude I_0 og en effektivverdi $I_{eff} = I_0 / Ö2$.

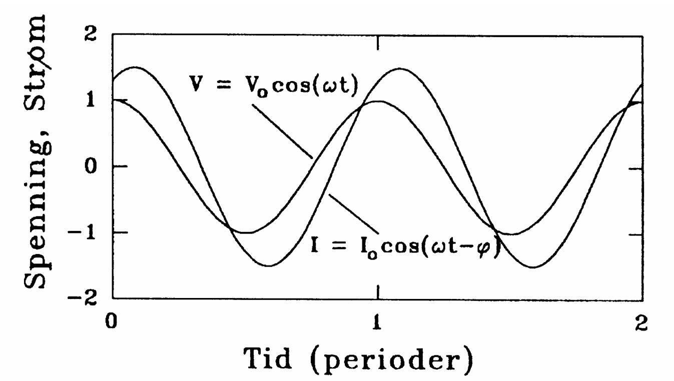
Likning 10 ser helt tilsvarende ut om en bruker amplitudeverdi i stedet for effektivverdi. Også for veksel *strøm* måles effektiv-verdien med et vanlig multimeter eller vekselstrøm-amperemeter, mens amplitudeverdiene lettest avleses med et oscilloskop.

For en ”ren” motstand (ofte kalt ”Ohmsk motstand”) er resistansen for vekselstrøm akkurat den samme som for likestrøm.

En spole eller kondensator oppfører seg noe annerledes. De har ikke samme resistans for likestrøm som for vekselstrøm, og vekselstrømsresistansen er frekvensavhengig. Dette markerer vi med å innføre et nytt symbol $|Z|$ som kalles *impedansmodulen*. Impedansmodulen til en komponent er komponentens vekselstrømsmotstand. Ved å innføre impedansmodulen $|Z|$, kan vi bruke vekselstrøms-varianten av Ohms lov, også for spoler og kondensatorer. Den ser da slik ut:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{|Z|} \qquad \text{eller} \qquad |Z| = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{V_0}{I_0} \tag{11}$$

Impedansmodulen $|Z|$ forteller bare noe om størrelsesforhold mellom strøm og spenning gjennom en komponent. En spole eller en kondensator vil også ha en annen virkning på kretsen. Når en vekselspenning kobles over en slik komponent, *vil strømmen og spenningen ikke alltid få sine maksimalverdier ved samme tidspunkt* (se figur 7).



Figur 7: *Eksempel på faseforskyvning mellom spenning og strøm i en vekselstrømkrets.*

Strømmen kan være faseforskjøvet i forhold til spenningen. Vi angir dette ved å skrive:

$$V = V_0 \cos(w\, t)$$

og

$$I = I_0 \cos(w\, t - j\,) \tag{12}$$

Størrelsen φ kaller vi *faseforskyvningen* for strømmen relativt til spenningen. Hvis faseforskyvningen er positiv, vil strømmen ha sitt maksimum ved et senere tidspunkt enn spenningen. På et oscilloskop vil maksimum for strømkurven da ligge til høyre for maksimum for spenningskurven. Faseforskyvningen kan variere mellom $+\pi/2$ og $-\pi/2$.

For å karakterisere hvordan en komponent oppfører seg i en vekselstrømskrets, må altså *to* størrelser bestemmes: Komponentens impedansmodul (vekselstrømsmotstand) og faseforskyvningen mellom strøm og spenning som komponenten fører til.

♠ **For de mest interesserte:**

Matematisk sett bruker vi som regel to andre størrelser enn impedansmodul og faseskift. Impedansmodulen tilsvarer lengden av en vektor, og fasevinkelen angir retningen på vektoren. Men en annen måte å angi en vektor på, er å gi x- og y-komponentene til vektoren. Disse verdiene kan kombineres til *ett komplekst* tall. Dette komplekse tallet kaller vi komponentens *impedans*, og vi bruker symbolet Z. Dekomponeres impedansen, kan vi skrive:

$$Z = R + jX \tag{13}$$

der R er resistansen (den "Ohmsk motstand"), mens størrelsen X kalles for *reaktans*. Både impedans, resistans og reaktans måles i ohm. Symbolet j er den imaginære enhet definert ved $j^2 = -1$. (I elektroteknikken benyttes vanligvis j som symbol for den imaginære enheten for å unngå forveksling med i som er symbol for strøm eller strømtetthet.)

Det er mulig å fremstille også vekselstrøm I og vekselspenning V på kompleks form (oppnår da å kunne gi både amplituden og fasen samtidig). Når dette gjøres, vil Ohms lov igjen få en meget enkel form:

$$\mathrm{Z = V/I} \tag{14}$$

Det elegante med denne formelen er at både amplituder og faseskift behandles under ett. Dette forenkler matematikken betraktelig, men når *målinger* skal gjennomføres, må vi tilbake til å bestemme impedansmoduler og faseskift igjen.

Sammenhengen mellom størrelsene i likning 13 og de størrelsene vi startet ut med blir da:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{15}$$

og

$$\tan j = X/R \tag{16}$$

Det er verdt å merke seg at både impedansmodul $|Z|$ og faseforskjellen φ generelt sett er frekvensavhengig. Resistanser (Ohmske motstander), spoler og kondensatorer har hver sin karakteristiske frekvensavhengighet. Dette kan vi utnytte for å *måle* den elektriske "størrelsen" til disse komponentene. Vi kan se litt nøyere på dette.

Resistansen til en Ohmsk motstand, R, måles i Ohm (Ω). Likestrømsmotstanden er her lik vekselstrømsmotstanden, dvs. $R = |Z|$, og denne endrer seg ikke med frekvensen.

En kondensator har evne til å ta opp ladning (lades opp) når vi setter spenning over den. Vi sier den har stor eller liten *kapasitans C* alt etter hvor mye ladning den kan ta opp for en gitt spenning over kondensatoren. Vekselstrømsmotstanden (impedansmodulen) til en kondensator er gitt som:

$$|Z| = \frac{1}{wC} = \frac{1}{2pfC} \tag{17}$$

der ω er vinkelfrekvensen, og f er frekvensen til vekselspenningen. Vi ser at impedansmodulen minker når kapasitansen øker, dvs. |Z| avtar når frekvensen øker. Når frekvensen går mot null, vil |Z| gå mot uendelig. En kondensator sperrer for likestrøm.

En spole har stor eller liten *induktans, L,* alt etter hvor stor spenning det blir over spolen ved en gitt *endring* i strøm pr. tidsenhet. Enheten er Henry (H). Vekselstrøms-motstanden (impedans-modulen) til en spole er gitt ved:

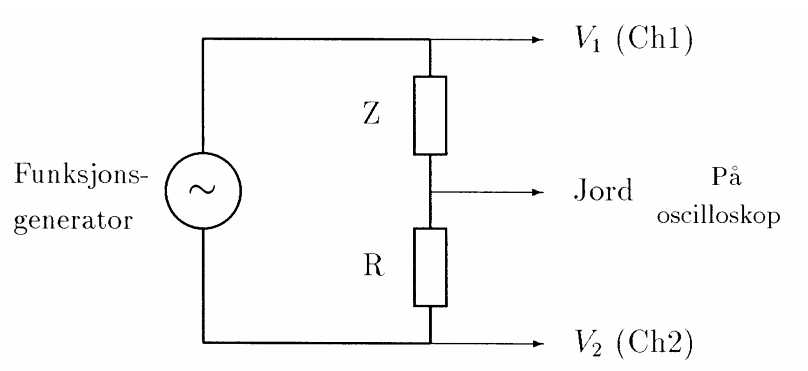
$$|Z| = wL = 2pfL \tag{18}$$

Impedansmodulen øker med spolens induktans, og den øker også med frekvensen. Dersom frekvensen f går mot null, vil også impedansmodulen |Z| gå mot null ifølge formelen ovenfor. Dette skjer aldri fullt ut i praksis, fordi en fysisk spole aldri er "ideell". Det er alltid noe Ohmsk motstand i metalltråden spolen er viklet av. Så selv om frekvensen er omtrent null (dvs. omtrent likestrøm), vil (vekselstrøms)motstanden ofte ligge et eller annet sted mellom 1 og 1000 Ω.

Oppsett for måling av impedans.

For måling av impedans kan vi bruke et oppsettet som vist i figur 8. Vi må bruke et dobbeltstråleoscilloskop. Vi har valgt å jorde koblingspunktet mellom Z og R. På denne måten kan vi få skilt spenningsmålingen over Z (V_Z), og spenningsmålingen over R (V_R). Dette oppsettet kan bare oppnås dersom funksjonsgeneratoren har "flytende utgang", dvs. at ingen av de to tilkoblingspunktene er jordet. (NB! Oscilloskopet er jordet)

På figur 8 er Z den komponenten som skal måles. Komponenten kan bestå av et enkelt element (motstand, kondensator, spole) eller flere slike elementer koblet sammen. Komponenten R er en motstand med kjent resistans (R = 1 kΩ). (Merk: Vi skiller mellom selve komponenten og verdien av denne komponenten med helningen av symbolet. Z betyr komponenten (en impedans), mens *Z* er selve impedansverdien av komponenten). Motstanden kan betraktes som en ren resistans i våre målinger.



Figur 8: *Koblingsskjema for måling av impedans*

Spenningen over R (V_R) måler vi for å bestemme *strømmen I* gjennom kretsen. *Dette er et svært vanlig triks!* Et oscilloskop kan nemlig ikke måle strøm direkte, bare spenning. Men ved å sette inn en ren Ohmsk motstand, kan vi få strømmen i kretsen ved å måle spenningen over motstanden, og så beregne strømmen ved hjelp av Ohms lov.

I slike koblinger må vi imidlertid være litt forsiktige med fortegnet. Anta at vi regner strømmen som positiv dersom den sirkulerer med klokka i kretsdiagrammet. Spenningen vi måler på kanal 1, V_1, vil da være positiv når V_Z er det. Spenningen på kanal 2, V_2, derimot, vil være negativ ved positiv strøm. Vi får altså:

$$V_Z = V_1$$

og

$$I = I_Z = -V_2/R \tag{19}$$

Vi kan også si at spenningen vi måler på kanal 2 er faseforskjøvet 180° i forhold til strømmen. En kan tenke seg at kurven fra kanal 2 burde vært snudd opp ned. I så fall ville den vise riktig bilde av strømmen gjennom Z. Forestiller du seg kurvene på denne måten, vil du kunne holde orden på fortegnet til faseforskjellene (dvs. om strømmen kommer før spenningen, eller motsatt).

MERK: Våre Tektronix oscilloskop har mulighet for å invertere (snu fortegnet) på signalet som kommer til kanal 2. Dersom du benytter deg av denne muligheten vil du eliminere faseforskyvningen, og avlesningene blir enklere.

I siste linje av likning 19 har vi poengtert at strømmen gjennom motstanden R er den samme som gjennom Z, dvs. $I = I_R = I_Z$

Måleoppstillingen kan benyttes til å måle amplitudene $V_{Z,0}$ og $I_{Z,0}$ for strøm og spenning gjennom Z, og dermed kan vi bestemme impedansmodulen $|Z| = V_{Z,0}/I_{Z,0}$. Vi kan også måle frekvensen og faseforskyvningen mellom strøm og spenning.

Oppgaven: Bestemmelse av impedansmoduler, kapasitans og induktans.

I denne oppgaven skal du bestemme likestrømsmotstanden og vekselstrømsmotstanden (impedansmodulen) for en motstand, en kondensator og en spole ved to forskjellige frekvenser. Du skal også bestemme faseforskyvingen mellom strøm og spenning ved en av frekvensene. Sist skal du beregne kondensatorens kapasitans og spolens induktans. Resultatene føres inn i vedlagte tabell.

Likestrømsmotstanden til komponentene måler du med et multimeter. (Med litt velvilje kan vi si at dette er impedansmodulen ved frekvensen null.)

Koble opp kretsen som vist i figur 8. (Da signalet fra funksjonsgeneratoren ofte har et lite DC offset, kan det være lurt i denne oppgaven å bruke oscilloskopet i AC funksjon.) La R være en motstand med kjent resistans (1 kΩ), og som Z setter vi inn etter tur den ukjente motstand R_X, kondensatoren C og spolen L og. Still funksjonsgeneratoren på harmonisk signal med amplitude ca. 2—5 V, og bruk etter tur frekvensene 1 kHz og 10 kHz. Mål peak-to-peak verdiene ($V_{1,pp}$ og $V_{2,pp}$) for de to spenningskurvene på oscilloskopet

Bestem også faseforskyvningen $j = 360\Delta t / T$, mellom spenning og strøm ved 1 kHz (dvs. faseforskjellen mellom V_1 og $-V_2$) for samtlige komponenter. Legg spesielt merke til fortegnet på fase-forskjellen, dvs. om strøm kommer foran spenning, eller motsatt. Bestem impedansmodulen |Z| ut fra likning 11, eller uttrykket:

$$|Z| = \frac{V_{Z,0}}{I_{Z,0}} = \frac{V_{1,pp}}{V_{2,pp}} R$$

(Det er en avgjort fordel om du forstår den siste overgangen her!)
Beregn også kapasitansen C og induktansen L ut fra likning 17 og 18 henholdsvis (må omskrives litt). Sammenlign med de nominelle verdiene.

Diskuter hvorvidt impedansmodulene |Z| varierer som forventet med frekvensen (ut fra likningene 17 og 18. Husk at selv om |Z| er frekvensavhengig, så er kapasitansen C og induktansen L konstanter.)

Utstyrsliste:

Oscilloskop
Multimeter (Fluke 75)
Variabel spenningskilde (0 — 15 V)
Funksjonsgenerator (TFG 8112 med strømkabel uten jording)
Kondensator 0.1 µF
Motstander: 1 kΩ, en ukjent
Spole
3 BNC - bananstikk overganger
mm-papir
1 to-dekaders enkeltlogaritmisk papir
1 fire-dekaders enkeltlogaritmisk papir

På målestasjoner:
Voltmeter med inngangsimpedans $>10^{10}$ Ω (Fluke 8840A)
Stoppeklokke der mellomtider kan leses av
Kondensator (10 µF) og motstand (10MΩ). (Koblet på ett og samme brett)

Sist oppdatert JAH 11.01.2007

Registreringsskjema for oppgave 4: Bestemmelse av impedansmoduler, kapasitans og induktans.

Målinger:	**Kondensator: C**	**Spole: L**	**Motstand: R**
0 Hz: $\|Z\|$			
1 kHz $V_{1,pp}$			
$V_{2,pp}$			
φ (grader)			
10 kHz $V_{1,pp}$			
$V_{2,pp}$			

Beregninger:

1 kHz $\|Z\| = \frac{V_{1,pp}}{V_{2,pp}} R$			
Fra ligning 17 og 18	**C** =	**L** =	------------------------
10kHz $\|Z\| = \frac{V_{1,pp}}{V_{2,pp}} R$			