

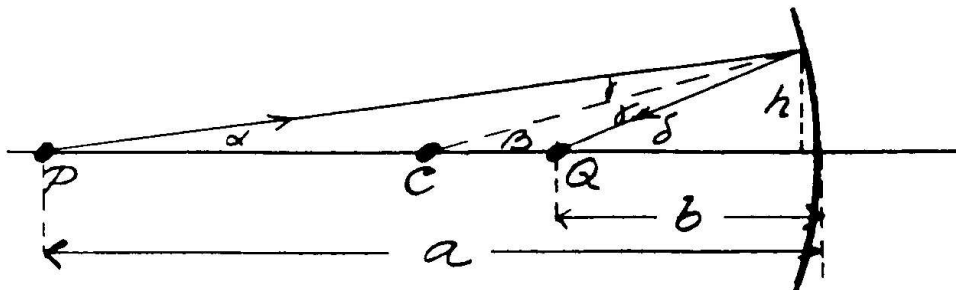
# FYS 2150. ØVELSE 14

## GEOMETRISK OPTIKK

Fysisk institutt, UiO

### 14.1 Teori

#### 14.1.1 Sfæriske speil



Figur 14.1: *Billedannelse med konkavt, sfærisk speil.*

Speilets krumningscenter ligger i punktet  $C$ . Et objekt i punktet  $P$  avbildes i punktet  $Q$ . Refleksjonsvinkelen  $\gamma$  er lik innfallsvinkelen. Følgelig er

$$\alpha + \gamma = \beta$$

$$\beta + \gamma = \delta$$

som medfører at

$$\alpha + \delta = 2\beta$$

Når vi forutsetter at vinklene er små, får vi

$$\alpha \approx \frac{h}{a}, \quad \beta \approx \frac{h}{r}, \quad \delta \approx \frac{h}{b}.$$

Her er  $a$  objektavstanden,  $b$  bildeavstanden og  $r$  speilets krumningsradius. Innsetting i  $\alpha + \delta = 2\beta$  gir relasjonen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

Hvis  $P$  rykker langt bort fra speilet slik at  $a \rightarrow \infty$ , blir  $b = r/2$ . Bildet dannes i speilets brennpunkt som ligger på speilets akse i avstanden  $r/2$  fra skjæringspunktet mellom aksene og speilet.

Speilets krumningsradius kan måles ved hjelp av et "sfærometer". Dette består av et måleuret og en ring med kjent indre og ytre diameter. Måleuret er montert i ringens sentrum. Sfærometeret settes på et objekt med sfærisk overflate. Måleuret benyttes til å bestemme høyden  $h$ . Kuleflatens radius  $r$  beregnes ved hjelp av uttrykket

$$r = \frac{\rho^2 + h^2}{2h},$$

der  $\rho$  er ringens radius. For konkave flater er det den ytre diameteren som får kontakt med flaten. For konvekse flater er det den indre.

## 14.1.2 Tykke linser

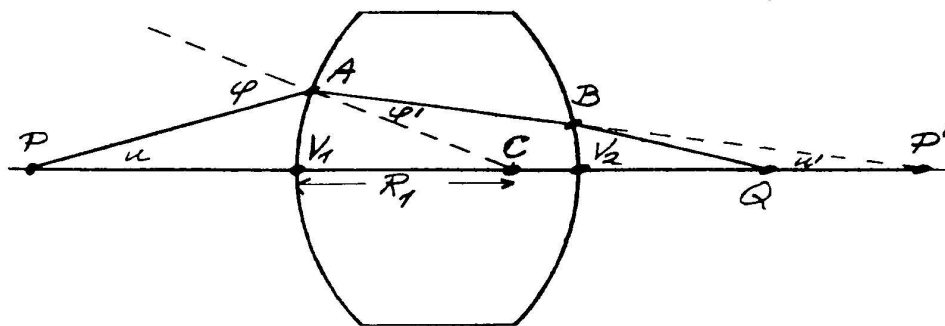
### En enkel linses kardinalpunkter

En linse er et optisk system begrenset av to eller flere brytende flater med en felles akse. En brytende flate kan være plan eller krum. De krumme flatene er som oftest sfæriske. Linser kan være enkle eller sammensatte. En enkel linse har bare to brytende flater.

Fig. 14.2 viser en enkel, bikonveks glasslinse i luft. Glasset har brytningsindeks  $n$ . Linsens sfæriske overflater har krumningsradiene  $R_1$  og  $R_2$ . Linsens akse går gjennom overflatenes krumningssentre. Aksen skjærer overflatene i punktene  $V_1$  og  $V_2$ .

Vi benytter følgende konvensjoner:

- Lyset sendes inn mot linsen fra venstre side.
- Objektavstander regnes som positive når objektet ligger på venstre side av linsen.
- Bildeavstander regnes som positive når bildet ligger til høyre for linsen.
- Krumningsradier regnes som positive når krumningssenteret ligger til høyre for skjæringspunktet mellom kuleflaten og aksene.



Figur 14.2: Strålegang gjennom bikonveks linse.

- En vinkel regnes som positiv når strålens helning med hensyn på akse (eller mhp. krumningsradien) er positiv.
- Punkter på oversiden av akse har positiv avstand fra akse.

Vår beskrivelse av strålegangen gjennom linsen forutsetter at strålene danner små vinkler med akse og at alle avstander som måles på tvers av akse er små (det “paraksiale” området).

Et objekt i punktet  $P$  på linsens akse avbildes i punktet  $Q$ . Forlengelsen av strålen  $AB$  skjærer akse i punktet  $P'$ . Vi ønsker å bestemme sammenhengen mellom avstanden  $a = PV_1$  og avstanden  $b = V_1P'$ .

Innfallsvinkelen  $\varphi$  og brytningsvinkelen  $\varphi'$  er knyttet sammen ved ligningen

$$\sin \varphi = n \sin \varphi'.$$

Dette er Snells lov. Luftens brytningsindeks er satt lik 1, linsens brytningsindeks er  $n$ . Vinkelen  $u$  er gitt ved

$$(a + R_1) \sin u = R_1 \sin \varphi.$$

I følge ovenstående konvensjoner skal vinkelen  $u'$  regnes som negativ. Derfor er

$$u + (\pi - \varphi) + \varphi' - u' = \pi$$

eller

$$u' = u + \varphi' - \varphi.$$

Endelig har vi

$$(b - R_1) \sin u' = -R_1 \sin \varphi'.$$

Ligningene viser at avstanden  $b$  er uavhengig av vinkelen  $u$  i det paraksiale området. Vi finner

$$b = \frac{naR_1}{(n-1)a - R_1}.$$

På samme måte kan vi bestemme sammenhengen mellom avstanden  $a' = V_2P'$  og avstanden  $b' = V_2Q$ . Avstanden  $a' = -(b - t)$ , der  $t = V_1V_2$  er linsens aksiale tykkelse, er negativ. Punktet  $P'$  er et "virtuelt" objekt for linsens andre overflate. Krumningsradien  $R_2$  er også negativ. Vi finner

$$b' = \frac{-a'R_2}{(n-1)a' + nR_2}.$$

Størrelsene  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  og  $b'$  er knyttet sammen ved 3 ligninger. Vi eliminerer  $a'$  og  $b$  og sitter igjen med en relasjon mellom  $a$ ,  $b'$ ,  $t$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  og  $n$ . Hvis linsetykkelsen  $t$  kan neglisjeres, får vi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

der  $f'$  er den "tynne" linsens brennvidde. I alminnelighet er  $a$  og  $b'$  knyttet sammen ved likningen

$$ab' + \alpha La + \beta Lb' + \gamma Lt = 0 \quad (14.1)$$

der

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{t}{nR_1} - \frac{1}{n-1} \\ \beta &= \frac{-t}{nR_2} - \frac{1}{n-1} \\ \gamma &= -\frac{1}{n(n-1)} \\ \frac{1}{L} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)t}{nR_1R_2}. \end{aligned}$$

Vi har forutsatt at  $t \neq n(R_1 - R_2)/(n-1)$  slik at  $1/L \neq 0$ . Relasjonen 14.1 mellom  $a$  og  $b'$  ovenfor kan skrives på formen .

$$\frac{1}{a + \delta_1} + \frac{1}{b' + \delta_2} = \frac{1}{f},$$

som impliserer

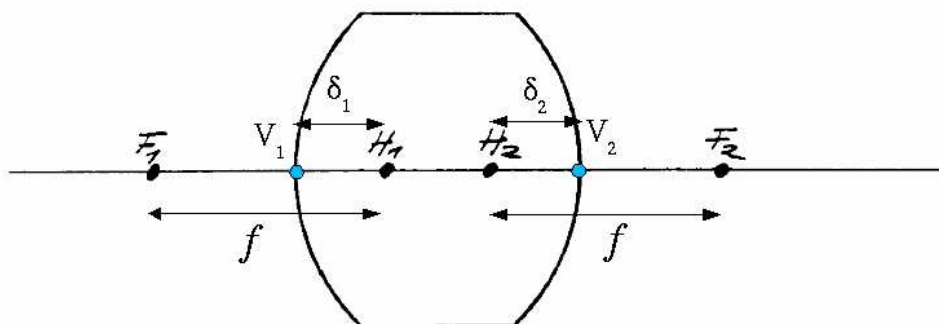
$$ab' + (\delta_2 - f)a + (\delta_1 - f)b' + \delta_1\delta_2 - (\delta_1 + \delta_2)f = 0. \quad (14.2)$$

Når vi sammenlikner koeffisientene i likning 14.1 og likning 14.2, får vi

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{(1-n)tf}{nR_2} \\ \delta_2 &= \frac{(n-1)tf}{nR_1} \\ f &= \frac{L}{n-1}. \end{aligned}$$

Punktet  $H_1$  som ligger i avstanden  $\delta_1$  fra  $V_1$ , kalles linsens første hovedpunkt. Punktet  $H_2$  som ligger i avstanden  $\delta_2$  fra  $V_2$  kalles linsens andre hovedpunkt. Lengden  $f$  kalles linsens brennvidde. Brennpunktene  $F_1$  og  $F_2$  er plassert i en brennviddes avstand fra hvert sitt hovedpunkt, se Fig. 14.3. Hovedpunktene og brennpunktene kalles linsens kardinalpunkter. Objektavstanden  $s$  er lik avstanden mellom objektet i punktet  $P$  og  $H_1$ . Bildeavstanden  $s'$  er lik avstanden mellom  $H_2$  og bildet i punktet  $Q$ . Størrelsene  $s$ ,  $s'$  og  $f$  tilfredsstiller linseformelen

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}.$$



Figur 14.3: Linsens kardinalpunkter.

### 14.1.3 Den laterale forstørrelse

Linsens laterale forstørrelse  $m$  er lik produktet av to faktorer  $m_1$  og  $m_2$  som er knyttet til linsens sfæriske overflater. I Fig. 14.4 er det tegnet et objekt med høyde  $y$  i punktet  $P$ . Fra objektets øverste punkt trekkes en linje gjennom den første overflatens krumningscenter  $C$ . Linjen forlenges til den skjærer linjen som er trukket vinkelrett på akse gjennom punktet  $P'$ . Punktene  $P$  og  $P'$  er de samme som i Fig. 14.2. Av Fig. 14.4 fremgår det at

$$m_1 = \frac{y'}{y} = -\frac{b - R_1}{a + R_1}.$$

Ved hjelp av likningene som ble stilt opp i forbindelse med Fig. 14.2, utledes relasjonen

$$\frac{b - R_1}{a + R_1} = -\frac{\sin u}{n \sin u'}.$$

I det paraksiale området er for øvrig

$$au = -bu'.$$

Derfor er

$$m_1 = -\frac{b}{na}$$

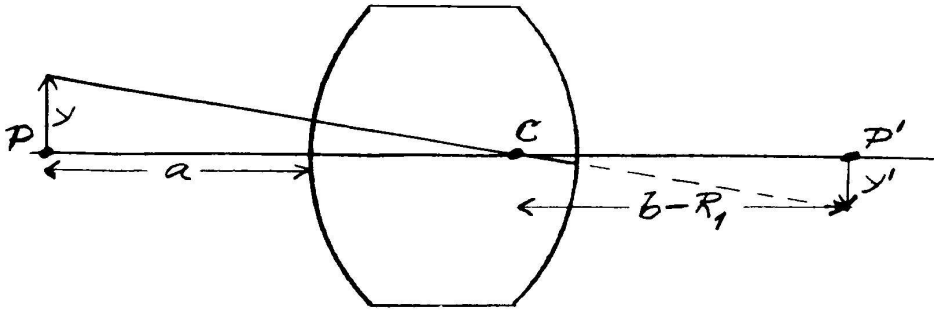
i det paraksiale området. Den tilsvarende faktor  $m_2 \equiv y''/y'$  for den andre kuleflaten kan beregnes på samme måten. Her er  $y''$  høyden på bildet i punktet  $Q$  på Fig. 14.2. Vi finner

$$m_2 = -\frac{nb'}{a'}.$$

Linsens laterale forstørrelse er derfor lik

$$m = \frac{bb'}{aa'} = -\frac{s'}{s}$$

når  $s$  og  $s'$  er forskjellige fra 0. Når  $s = s' = 0$ , blir  $m = 1$ . Hovedplanene kalles derfor konjugerte enhetsplan (“conjugate planes of unit magnification”).



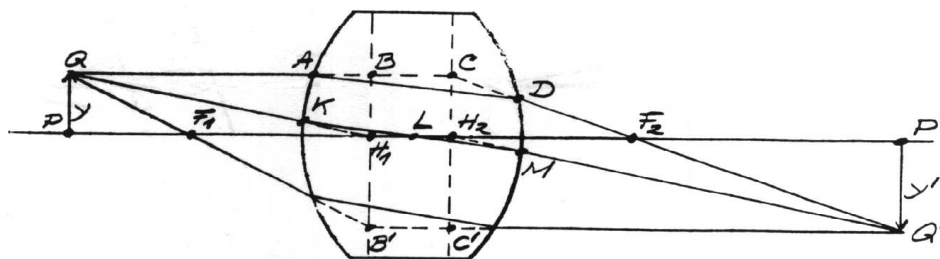
Figur 14.4: Beregning av  $m_1 = y'/y$ .

#### 14.1.4 Linsens hovedplan

I Fig. 14.5 er det tegnet et objekt  $PQ$  med høyde  $y$  i en avstand  $s$  fra første hovedplan (planet gjennom  $H_1$  vinkelrett på akse). Det tilhørende bildet  $P'Q'$  med høyde  $y'$  befinner seg i avstanden  $s'$  fra andre hovedplan (planet gjennom  $H_2$  vinkelrett på akse). Det er tegnet tre stråler som går ut fra punktet  $Q$  på objektet. Den ene strålen går til å begynne med parallelt med akse og treffer linsens første kuleflate i punktet  $A$ . Strålen fortsetter til punktet  $D$  på den andre kuleflaten og passerer så andre brennpunkt  $F_2$  på sin vei til  $Q'$ . Linjen  $QA$  forlenges til punktet  $B$  på første hovedplan. Linjen  $DF_2$  forlenges til punktet  $C$  på andre hovedplan. Vi ønsker å sammenligne avstandene  $H_1B$  og  $H_2C$ .

Fig. 14.5 viser at

$$H_2C = -y' \frac{f}{s' - f}.$$



Figur 14.5: Hovedplanenes egenskaper.

Men

$$\frac{y'}{y} = m = -\frac{s'}{s}$$

slik at

$$H_2C = y \frac{s'}{s} \cdot \frac{f}{s' - f} = y \frac{s'f}{s' - f} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{s'} \right) = y = H_1B$$

i overensstemmelse med at  $m \rightarrow 1$  når  $s \rightarrow 0$ . Dette resultat viser at punktet  $C$  ligger på forlengelsen av strålen  $QA$ .

Når strålen fra  $Q$  gjennom  $F_1$  behandles på samme måte, kan det vises at  $H_1B' = H_2C'$ .

Den tredje strålen fra  $Q$  er rettet mot  $H_1$ . Denne strålen kalles i enkelte bøker for hovedstrålen. Den treffer linsen i punktet  $K$ , skjærer aksene i punktet  $L$  i avstanden  $R_1t/(R_1 - R_2)$  fra  $V_1$  og forlater linsen i punktet  $M$ . Forlengelsen av linjen  $MQ'$  treffer andre hovedplan i  $H_2$ . For øvrig er linjen  $H_2Q'$  parallell med linjen  $QH_1$  fordi  $|y'|/s' = y/s$ .

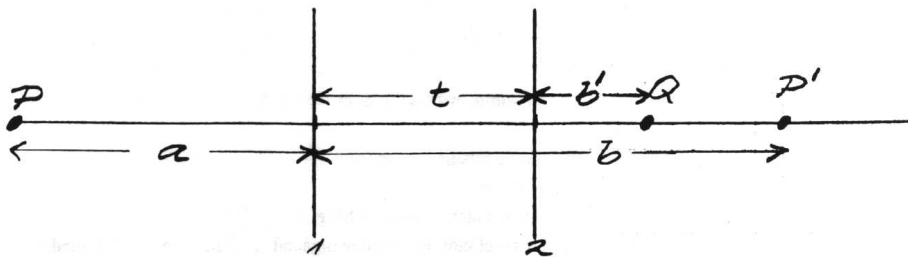
### 14.1.5 Sammensatte linser

Vi begrenser oss til å beskrive sammensetning av tynne linser (for en tynn linse faller hovedpunktene sammen med lensens sentrum).

Fig. 14.6 viser to tynne linser med felles akse. Lensene har brennviddene  $f_1$  og  $f_2$ . Avstanden mellom dem er  $t$ . Et objekt befinner seg i punktet  $P$  i avstanden  $a$  fra den første linsen. Hvis den andre linsen var fjernet, ville det dannes et bilde i punktet  $P'$  i en avstand  $b$  fra den første linsen. Dette bildet blir et objekt for den andre linsen. Objektavstanden er  $a' = t - b$ . Når lyset fra  $P$  har passert begge lensene, dannes det et bilde i punktet  $Q$  i avstanden  $b'$  fra den andre linsen.

Vi benytter linseformlene

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} \quad \text{og} \quad \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f_2}.$$



Figur 14.6: Avbildning ved hjelp av to tynne linser.

Størrelsene  $a'$  og  $b$  elimineres. Vi får en relasjon mellom objektavstanden  $a$  og bildeavstanden  $b'$  som kan skrives på formen

$$ab' - \alpha La - \beta Lb' - Lt = 0$$

der

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{t}{f_1} - 1 \\ \beta &= \frac{t}{f_2} - 1 \\ L &= \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t}.\end{aligned}\tag{14.3}$$

Vi har gått ut fra at  $t \neq f_1 + f_2$ . Relasjonen mellom  $a$  og  $b'$  kan også skrives på formen

$$\frac{1}{a + \delta_1} + \frac{1}{b' + \delta_2} = \frac{1}{f}.$$

Ved sammenlikning av koeffisienter får vi

$$f = L, \quad \delta_1 = \frac{tf}{f_2}, \quad \text{og} \quad \delta_2 = \frac{tf}{f_1}.$$

(løsningen  $f = -L$  er uinteressant).

Plasseringen av linsesystemets kardinalpunkter er antydnet på Fig. 14.7. Objektavstanden  $s = a + \delta_1$ , bildeavstanden  $s' = b' + \delta_2$  og den sammensatte lensens brennvidde  $f$  tilfredsstillers linseformelen

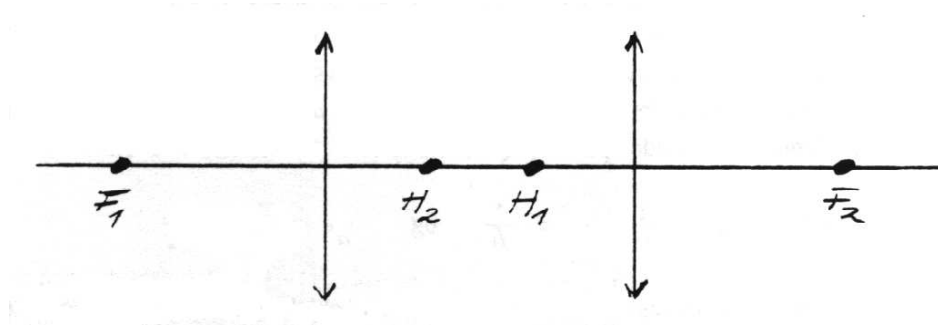
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}.$$

Følgende resultater kan vises på samme måte som for enkle linser:

- Den sammensatte lensens laterale forstørrelse er lik  $-s'/s$ .



- Hovedplanene er konjugerte enhetsplan.
- Hovedstrålen passerer linsesystemet uten retningsendring: Når den inngående strålen er rettet mot  $H_1$  vil den utgående strålen være parallell med den inngående. Når den utgående strålen forlenges bakover, vil den treffe  $H_2$ .



Figur 14.7: Plasseringen av kardinalpunktene til et system av to identiske, konvekse linser. Hovedpunktene er "krysset".

## 14.2 Speil og enkle linser

### Oppgave 1. Sfærisk speil

1. Bestem speilets krumningsradius ved hjelp av et sfærometer.
2. Bestem krumningsradien ved optiske målinger

### Oppgave 2. Plankonveks linse

1. Bestem krumningsradien  $R$  til den sfæriske del av linsens overflate.
2. Benytt de oppgitte verdier for linsens tykkelse og glassets bryningsindeks sammen med den funne verdi for  $R$  til å beregne kardinalpunktene posisjoner.
3. La linsens plane side vende mot lyskilden. Mål sammenhørende verdier av objektavstand  $s$ , bildeavstand  $s'$  og lateral forstørrelse  $m$  for 5–10 forskjellige objektavstander. Benytt måleresultatene til å beregne linsens brennvidde  $f$  med usikkerhet. Sammenlikn de målte verdier av  $m$  med forholdet  $-s'/s$ .

### Oppgave 3. Konkav linse

Vi benytter en konveks hjelpelinse som plasseres slik i forhold til lyskilden at det dannes et reelt bilde bak linsen. Bildets posisjon  $P$  noteres. Så plasseres den konkave linsen mellom den konvekse linsen og punktet  $P$ . I forhold til den konkave linsen blir bildet i  $P$  et "virtuelt" objekt med negativ objektavstand  $s$ . Bestem den tilhørende bildeavstand  $s'$ . Tegn en skisse med angivelse av posisjonene til de komponenter som benyttes. Beregn brennvidden til den konkave linsen. Gjenta målingene med en annen objektavstand.

### Oppgave 4. Avvik

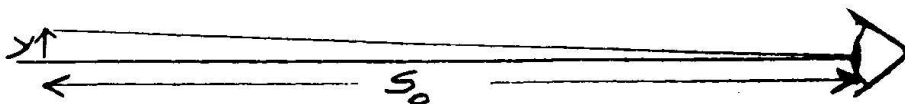
Benytt en bikonveks linse.

1. Velg en fast objektavstand. Bruk grønt lys. Sammenlikn posisjonen til randstrålenes bilde med posisjonen til sentralstrålens bilde ("sfærisk" avvik).
2. Velg en fast objektavstand. Sammenlikn posisjonene til de bildene du får med hhv. rødt og blått lys ("kromatisk" avvik).

## 14.3 Sammensatte linser

### Oppgave 5. Konveks linse brukt som forstørrelsesglass (lupe)

Et objekt med høyde  $y$  befinner seg i avstanden  $s_0$  fra øyet, se Fig. 14.8. Synsvinkelen



Figur 14.8: Øyets synsvinkel.

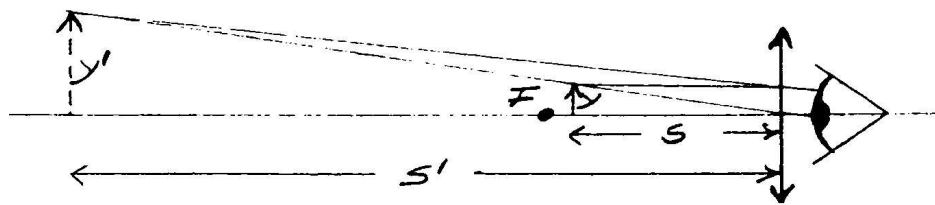
betegnes med  $\phi$  og vi har

$$\tan \phi = \frac{y}{s_0}.$$

Vi lar nå  $s_0$  være den minste avstand som gir et skarpt bilde på netthinnen. En konveks linse med brennvidde  $f$  plasseres nær øyet. Objektet plasseres til høyre for linsens første brennpunkt. Linsen danner et virtuelt bilde av objektet.

Øyet ser det virtuelle bildet under en vinkel  $\phi_1$ , som vist i figur 14.9 og vi har

$$\tan \phi_1 = \frac{y'}{|s'|} = \frac{y}{s}.$$



Figur 14.9: Observasjon av virtuelt bilde med øyet.

Vinkelforstørrelsen er

$$m = \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi} = \frac{s_0}{s} = s_0 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{s'} \right) = s_0 \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{|s'|} \right).$$

Vi ser at  $m$  blir maksimal når  $|s'|$  er minimal, dvs. når  $|s'| = s_0$ . Da blir vinkelforstørrelsen

$$m = \frac{s_0}{f} + 1.$$

Angi verdien av  $s_0$  for ett av dine øyne. Benytt en linse med kjent brennvidde. Betrakt et lite objekt med og uten lupe. Bestem den objektavstand som gir maksimal vinkelforstørrelse (for et standard øye benyttes  $s_0 = 250$  mm).

## Oppgave 6. Et teleobjektiv

Oppgaven går ut på å undersøke et system som består av en bikonveks linse med brennvidde 200 mm og en bikonkav linse med brennvidde -200 mm med en avstand på 100 mm. Bestem kardinalpunktene sine posisjoner. Hvorfor er denne sammensatte linsen velegnet som teleobjektiv?

## Oppgave 7. Kikkert (Kepler)

Vi skal lage en enkel kikkert ved hjelp av teleobjektivet fra Oppgave 6 og en bikonveks linse med brennvidde 50 mm som okular. Objektivet danner et reelt, invertert og forminsket mellombilde av et fjernt objekt. Okularet gir et forstørret, men virtuelt bilde av mellombildet. Kikkertens vinkelforstørrelse er tilnærmet lik forholdet mellom brennviddene til objektivet og okularet.

Plasser et lysende objekt i noen meters avstand fra kikkerten. Oppsøk mellombildets posisjon ved hjelp av en mattskive. Fjern så mattskiven, og still inn okularet slik at du ser et skarpt bilde av objektet. Tegn en skisse av oppstillingen. Angi komponentenes posisjoner. Gjør rede for strålegangen gjennom kikkerten.