

FYS 2150.ØVELSE 16

BØLGEOPTIKK

Fysisk institutt, UiO

Noen av disse øvelsene går ut på å observere optiske fenomener ved hjelp av en laserstråle. **NB! Man bør unngå å få laserstrålen i øynene.**

16.1 Diffraksjon og interferens

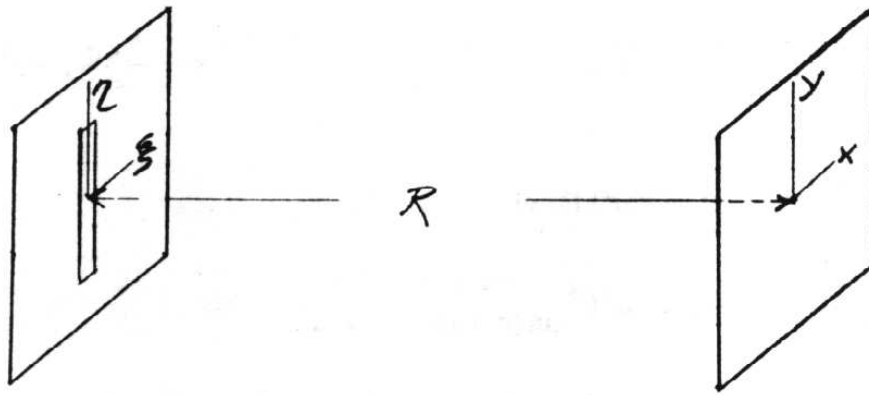
En plan monokromatisk lysbølge med bølgelengde λ faller inn mot en skjerm med en smal spalte. Bølgenormalen står vinkelrett på skjermen. Vi benytter et kartesisk koordinatsystem med z -aksen langs bølgenormalen. Et punkt på skjermen har koordinatene $(\xi, \eta, 0)$. Et diffraksjonsmønster observeres i et plan i stor avstand R fra skjermen. Et vilkårlig punkt i observasjonsplanet har koordinater (x, y, R) . Geometrien er vist i Fig. 16.1. Spalten har bredde a og lengde b .

Det elektriske feltet i lysbølgen beskrives ved hjelp av en kompleks skalarfunksjon ϕ . Vi vil finne ut hvordan ϕ varierer over observasjonsplanet ved å benytte Huygens prinsipp. Hvert punkt $(\xi, \eta, 0)$ på bølgefronten i spalteåpningen er utgangspunkt for en kulebølge

$$\phi(s, t) \equiv \frac{1}{s} e^{i(ks - \omega t)}.$$

Her er $k = 2\pi/\lambda$ vinkelbølgetallet, ω er vinkelfrekvensen, t er tiden og s er avstanden mellom $(\xi, \eta, 0)$ og observasjonspunktet (x, y, R) . Verdien av funksjonen ϕ i punktet (x, y, R) i observasjonsplanet finnes ved å superponere kulefunksjonene fra alle punktene i spalteåpningen. I det generelle uttrykk for denne superposisjon er hver kulefunksjon multiplisert med en vinkelavhengig faktor χ . Det vil føre for langt å diskutere det generelle uttrykket her. Vi innfører restriksjonene

$$a \ll R, \quad b \ll R, \quad |x| \ll R, \quad \text{og} \quad |y| \ll R,$$



Figur 16.1: Geometrien som benyttes ved beregning av det elektrisk feltet i et punkt (x, y, R) i observasjonsplanet.

slik at vi kan approksimere faktoren χ ved tallet 1 i superposisjonen, dvs. i integralet av $\phi(s, t)$ over spalteåpningen.

Avstanden $s = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + R^2}$. Ovenstående restriksjoner gjør det mulig å erstatte s i integralet med uttrykket

$$R + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2R}.$$

I nevneren i uttrykket for kulefunksjonen beholder vi bare det første leddet her, dvs. at vi erstatter s med konstanten R . Dette medfører at dobbelintegralet over ξ og η forenkles til et produkt av to enkle integraler. For øvrig velges observasjonspunktene slik at vi kan neglisjere kvadratleddene ξ^2 og η^2 i eksponentialfunksjonen. Illuminansen E i observasjonsplanet er proporsjonal med $|\phi(x, y)|^2$. Vi begrenser oss nå til å finne ut hvordan E avhenger av x . For en konstant verdi av y får vi endelig

$$E(x) \propto \left| \int e^{-\frac{2\pi i \xi x}{\lambda R}} d\xi \right|^2 = a^2 \left(\frac{\sin(\pi a u)}{\pi a u} \right)^2$$

der $u \equiv x/(\lambda R)$.

Hvis skjermen har to smale, parallelle spalter med bredde a og plassert slik at avstanden mellom spaltene er A , blir

$$E_2(x) \propto a^2 \left(\frac{\sin(2\pi A u)}{\sin(\pi A u)} \cdot \frac{\sin(\pi a u)}{\pi a u} \right)^2$$

Integrasjonsområdet er i dette tilfellet lik unionen av intervallene

$$\left\langle -\frac{A+a}{2}, -\frac{A-a}{2} \right\rangle \text{ og } \left\langle \frac{A-a}{2}, \frac{A+a}{2} \right\rangle.$$

For N parallelle spalter (et “gitter”) får vi

$$E_N(x) \propto a^2 \left(\frac{\sin(N\pi Au)}{\sin(\pi Au)} \cdot \frac{\sin(\pi au)}{\pi au} \right)^2.$$

Interferensmønsteret i observasjonsplanet blir nå ganske komplisert. Illuminansen i observasjonsplanet får hovedmaksima når

$$x = \frac{m\lambda R}{A}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Illuminansen er lik null når

$$x = \frac{\lambda R}{AN}, 2\frac{\lambda R}{AN}, \dots, (N-1)\frac{\lambda R}{AN}, (N+1)\frac{\lambda R}{AN}, \dots$$

Det er $(N-1)$ nullpunkter mellom to nabohovedmaksima. Det er $(N-2)$ sekundære maksima mellom to nabohovedmaksima. De sekundære maksima har mye mindre illuminans enn et hovedmaksimum. Halvparten av bredden til et hovedmaksimum er $\lambda R/(AN)$.

Når lysets bølgelengde forandres fra λ til $\lambda + \Delta\lambda$, forskyves posisjonen til et hovedmaksimum fra $x = m\lambda R/A$ til $x + \Delta x = m(\lambda + \Delta\lambda)R/A$, slik at $\Delta x = mR\Delta\lambda/A$. Vi kan klare å skille de nærliggende hovedmaksima svarende til bølgelengdene λ og $\lambda + \Delta\lambda$ hvis Δx er lik eller større enn halvparten av bredden til et hovedmaksimum. Herav følger at gitterets oppløsningsevne $\lambda/\Delta\lambda = mN$.

Hvis skjermen på Fig. 16.1 har en sirkulær apertur, blir diffraksjonsmønsteret rotasjonssymmetrisk. Illuminansen i et plan i stor avstand R fra aperturen er proporsjonal med

$$\left(\frac{2J_1(w)}{w} \right)^2,$$

der J_1 er Besselfunksjonen av første orden og

$$w = \frac{\pi ar}{\lambda R}.$$

Her er a aperturens diameter og r er avstanden fra diffraksjonsmønsterets sentrum (i observasjonsplanet). De første nullpunktene til J_1 er

$$0 \quad 3,832 \quad 7,016 \quad 10,173 \quad 13,324.$$

Oppgave 1. Enkeltspalter med forskjellige bredder

Benytt spalter med kjente bredder. Det er hensiktsmessig å returnere lyset ved hjelp av et speil slik at observasjonsskjermen kan plasseres nær spalten. Mål avstanden mellom to mørke områder i diffraksjonsmønsteret. Disse områdene bør ligge så langt fra hverandre som mulig. Benytt den målte avstand til å bestemme spaltens bredde (du trenger enkeltspaltens illuminansuttrykk). Sammenlikn de eksperimentelt bestemte verdier for spaltenes bredder med de oppgitte verdier.

Oppgave 2. To parallelle spalter

Vi øker tverrsnittet på laserstrålen ved hjelp av to konvekse linser. Nærmest laseren plasseres en linse med en brennvidde på 20 mm. Den andre linsens brennvidde er 300 mm. Avstanden mellom linsene velges lik summen av brennviddene (dette er en “afokal” sammensatt linse). Spaltebredde og avstand mellom spaltene er oppgitt. Hvor mange illuminansmaksima (lyse striper) venter du å finne innenfor enkeltspaltens sentrale diffraksjonstopp? Undersøk om det observerte antall striper stemmer overens med det forventede antall.

Oppgave 3. Flere parallelle spalter

Undersøk hvordan interferensmønsteret forandres når antall spalter vokser.

Oppgave 4. Sirkulær apertur

Benytt en sirkulær apertur med oppgitt diameter (fjern linsene som ble benyttet til å utvide laserstrålen). Beregn verdiene på diameterne til de innerste mørke ringene i diffraksjonsmøsteret på observasjonsskjermen. Undersøk om de målte diameterne stemmer overens med de forventede verdier.

16.2 Gitterspektrometeret

Et spektrometer består i hovedsak av en kollimator, et gitter eller prisme og en kikkert med trådkors i okularet. Kollimatoren er et rør med en justerbar spalte i den ene enden og en konveks linse i den andre. Spalten befinner seg i linsens brennplan. Når spalten belyses av f. eks. en spektrallampe, kommer det parallelt lys ut fra kollimatoren. Et gitter plassert vinkelrett på kollimatoraksen vil avbøye spektralkomponentene i lyset fra lampen i forskjellige retninger. Ved hjelp av kikkerten, som bør være innstilt på “uendelig”, kan vinklene svarende til disse retningene leses av på spektrometerets gradskala. Avlesningen foretas når kikkertens trådkors faller sammen med spektrallinjen. Det er fordelaktig å observere en spektrallinje med kikkerten i to posisjoner. Den ene gangen er kikkerten i posisjonen α_h , til høyre for kollimatoraksen. Den andre gangen er kikkerten i posisjonen α_v , til venstre for kollimatoraksen. Avbøyningsvinkelen som skal settes inn i gitterlikningen

$$d \sin \theta = m\lambda$$

er lik

$$\theta = \frac{\alpha_h - \alpha_v}{2}.$$

Her er m spekterets orden og d er gitterkonstanten, dvs. avstanden mellom strekene i gitteret.

Uttrykket for den relative usikkerheten i bølgelengden er

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\theta}{\tan\theta}\right)^2}$$

der

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\alpha_h)^2 + (\Delta\alpha_v)^2}$$

NB! Det er viktig å uttrykke usikkerheten i radianer.

Oppgave 5. Balmerlinjer

En hydrogenlampe settes foran kollimatorspalten. Bestem bølgelengdene til de spektrallinjene du klarer å se tydelig. Anslå usikkerhetene i vinklene α_h og α_v , og beregn de tilhørende usikkerhetene i bølgelengdene. Gitterkonstanten d kan regnes ut fra antall streker pr. tomme, som er oppgitt. Sammenlikn de bølgelengdene du finner med de teoretiske verdiene som er gitt ved

$$\lambda_n = \frac{1}{R \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right]}$$

der Rydbergkonstanten $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ og hovedkvantetallet $n = 3, 4, 5, \dots$

Oppgave 6. Heliumlinjer

En heliumlampe settes foran kollimatorspalten. Bestem bølgelengdene til *minst* en rød, en gul, en grønn, en blå og en blåfiolett spektrallinje. Anslå usikkerhetene i de avleste vinklene og beregn de tilhørende usikkerhetene i bølgelengdene.

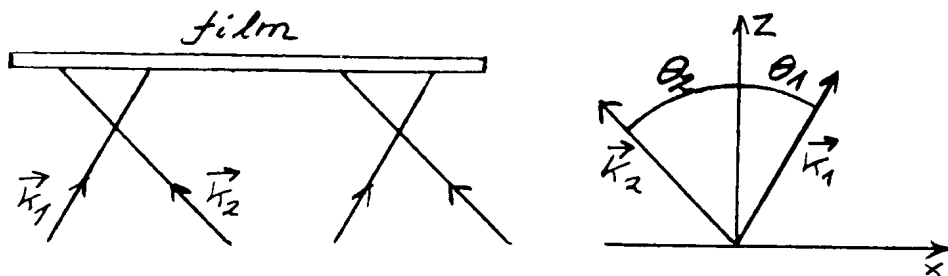
16.3 Holografi

Det synsinntrykket vi får ved å se på et motiv er betinget av lysforholdene, og av hvordan objektet sprer og reflekterer lyset. En bølgefront brer seg fra objektet og denne inneholder all optisk informasjon. Ved bruk av en linse for billedannelse (f. eks. øyet eller et kamera) observerer vi i ethvert øyeblikk objektet fra bare en avstand og under en synsvinkel. Bølgefronten er imidlertid romlig fordelt slik at synsinntrykket varierer med avstand og synsvinkel i forhold til objektet.

Vi innser at det å plassere en fotografisk plate som spenner over en stor sektor gir en film med tilnærmet jevn svertning. Grunnen til at filmen mangler nyttig informasjon om bølgefronten, og dermed om objektet, er at faseinformasjonen går tapt i deteksjonsøyeblikket. Det er $\psi^* \cdot \psi$ i stedet for ψ som blir registrert på den fotografiske plata.

Gabor, som fikk Nobelprisen i fysikk for ideen og teorien bak holografi, foreslo å bruke en koherent referansebølge som interfererer med lyset som sendes ut fra objektet for derved å samle faseinformasjonen. Dette arbeidet publiserte han i det vitenskapelige tidsskrift *Nature*, **161**, 777 (1948). Først ved utvikling av intense koherente lyskilder, LASER, ble det mulig å lage gode hologram.

Det enkleste hologrammet vi kan forestille oss, dannes ved at objektet er en lyskilde i det uendelige fjerne, dvs. at lysbølgen fra objektet er en plan bølge, og at referansebølgen også er en plan bølge som vist i Fig. 16.2. Disse treffer en



Figur 16.2: To plan-bølger med bølgetall k_1 og k_2 treffer en fotografisk plate.

fotografisk plate med god oppløsning (finkornet). Fordi de to plane bølgene er koherente oppstår en modulasjon av intensiteten på den fotografiske plata, og følgelig en modulasjon av svertningen. For dette enkle tilfellet med to plane bølger kan modulasjonen lett beregnes. La de to bølgene være representert ved funksjonene

$$\psi_n = A'_n e^{i\vec{k}\vec{r}} = A'_n e^{ik_{nz}z} e^{ik_{nx}x}$$

der $n = 1, 2$. Se Fig. 16.2 for definisjon av symboler. På den fotografiske filmen er z konstant slik at vi kan skrive

$$A'_n e^{ik_{nz}z} = A_n$$

og følgelig

$$\psi_n = A_n e^{ik_{nx}x}$$

der

$$k_{1x} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_1, \quad k_{2x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_2.$$

Den totale bølgefunksjonen på filmen blir

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

og intensiteten som svertter filmen blir

$$\psi^* \psi = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\Re [A_1 A_2^* e^{i(k_{1x} - k_{2x})x}].$$

Hvis vi skriver $A_1 A_2^* = \rho e^{i\phi}$, blir det siste leddet lik

$$2\rho \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)x\right).$$

Vi ser at svertingen blir harmonisk modulert med periode d gitt ved

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}.$$

Tro rekonstruksjon oppnår man når en bølge som er identisk med referansebølgen sendes inn mot hologrammet (dvs. den fotografiske plata etter fremkalling) under samme vinkel θ_2 . I følge gitterlikningen er vinkelen som de diffrakterte strålene danner, θ_3 , gitt ved

$$d(\sin\theta_2 + \sin\theta_3) = m\lambda.$$

Fra uttrykket for d ser vi at denne likningen er oppfylt når $\theta_3 = \theta_1$ for $m = 1$. Altså fortsetter den diffrakterte strålen i den retningen som strålen fra objektet kom inn mot den fotografiske plata, og vi har rekonstruert objektbølgen. Vi har her betraktet et enkelt tilfelle som lett lar seg behandle matematisk, men objektet kan ha hvilken som helst kompleksitet, forutsatt at det er i ro under eksponeringen. Oppsett for holografioptak er vist i Fig. 16.3. Ved rekonstruksjon tar vi vekk objektet og lar en rekonstruksjonsstråle belyse det fremkalte hologrammet.

Oppgave 7.

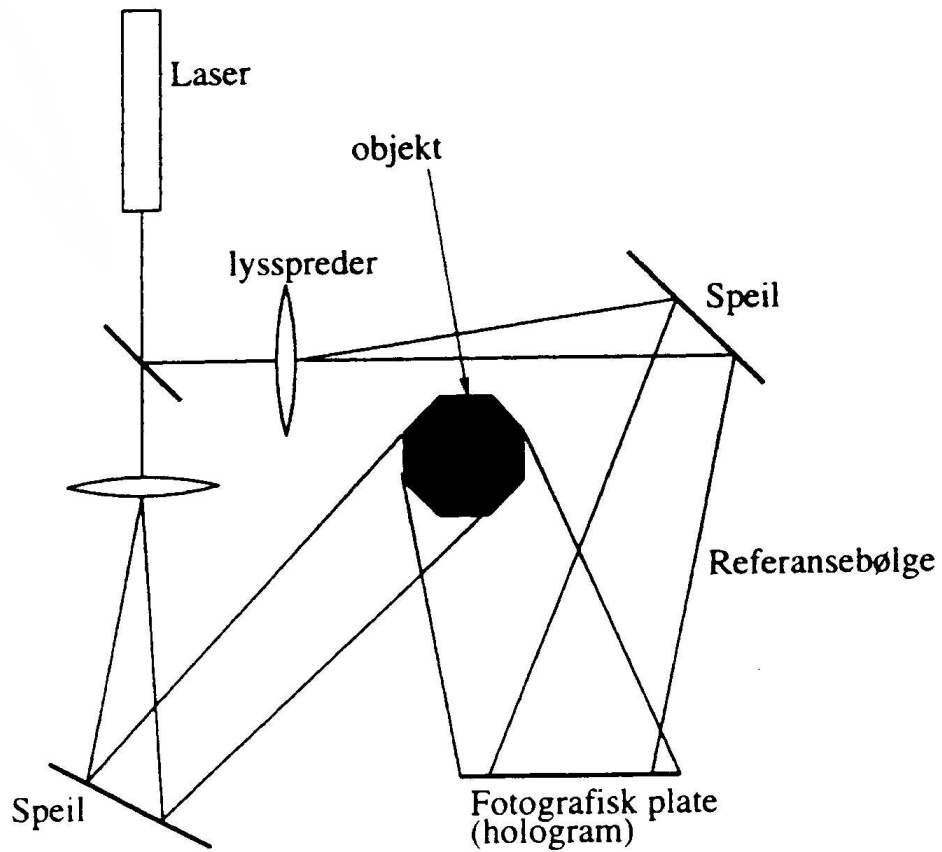
Studer de framlagte hologrammene ved bruk av monokromatisk laserlys¹, og ved hvitt lys fra en lampe.

¹Også elektron-, nøytron- og røntgenstråler blir benyttet i forbindelse med holografi og interferometri. Aktuelle artikler om elektronholografi for studier av atomær og magnetisk struktur:

1. J.J.Barton, Phys. Rev. Lett. 61, 1356 (1988).
2. A.Tonomura, Physics Today, side 22, April 1990.

Om nøytron- og røntgeninterferometri:

1. D.G.Greenberger, Rev. Mod. Phys. 55, 875 (1983).
2. Bonse og Hart, Physics Today, side 26, August 1970.



Figur 16.3: Oppsett for holografioptak.