Masse og Kraft

Dag Kristian Dysthe, Anja Røyne, and Ole Ivar Ulven
Fysisk institutt, UiO
(Dated: February 13, 2017)

Målet i denne oppgaven er å forstå grunnprinsippene for måling av kraft og forstå forholdet mellom kraft og masse og hva vi egentlig kan måle. Målet er også at dere skal erfare og lære noe om eksperimentell logikk og sunn fornuft i praksis.

I. BAKGRUNN

I kapittel 8 og 9 i Squires diskuterer han eksperimentell logikk og sunn fornuft. En del av dette skal dere prøve å sette ut i praksis når dere skal lage så nøyaktige kraft-/masse-målere som mulig. Utgangspunktet er den kjente formelen

$$F = ma, \tag{1}$$

der F er kraft, m er masse og a er aksellerasjon. På en vanlig vekt måles kraften der $a = g$ er tyngdens aksellerasjon i et gravitasjonsfelt. Newton har fått æren for å innse at massen m som aksellereres uten gravitasjon er den samme massen som blir tiltrukket av andre masser. Når vi bruker en vekt som baserer seg på tyngdens aksellerasjon er vi avhengig av enten å kjenne størrelsen på g (som ikke er den samme overalt) eller bruke balanseprinsippet. I det siste tilfellet må vi balansere mot kjente standardvekter. Alternativet er å bruke (eller måle) en eller annen aksellerasjon som ikke avhenger av gravitasjonen. For å måle en kraft er der to hovedprinsipper: å måle deformasjon av et elastisk materiale (f.eks. en fjær) eller å sette opp en motkraft for å stoppe bevegelse.[1]

A. Følsomhet, oppløsning og dynamisk område

I denne øvelsen kommer vi mye borti begrepene følsomhet, oppløsning og dynamisk område. Det er derfor viktig å ha klart for seg hva begrepene innebærer.

1. Følsomhet

Med *følsomhet* [2] mener man den minste enheten man klart kan observere med et måleinstrument, hvilket vil si at større følsomhet gjør at den minste enheten blir mindre. Dette henger sammen med usikkerheten i målingen. Endringer som er mindre enn målingens usikkerhet, kan man ikke med sikkerhet si at er faktiske endringer i den målte verdien. Legg merke til at følsomheten til et måleinstrument kan være forskjellig avhengig av hvor store verdier man måler.

2. Oppløsning

Oppløsning er et ord mange er mest vant til å bruke om bilder, jo flere bildepunkter man har, jo flere detaljer er man i stand til å se i bildet. I målinger er betydningen i stor grad den samme, men de minste detaljene man er i stand til å se, blir avgjort av målingens følsomhet. Større følsomhet gjør dermed at oppløsningen i målingen blir større.

3. Dynamisk område

Det vanskeligste når man skal lage et måleinstrument er ofte å få et stort *dynamisk område.* Det vil si at instrumentet kan måle både store verdier og små variasjoner rundt store verdier med liten usikkerhet. Dette oppgis som et antall størrelsesordener mellom den største verdien man er i stand til å måle med et instrument, og den minste endringen man samtidig kan observere, som altså er instrumentets følsomhet i det gitte måleområdet. For eksempel er det største man kan måle med en ordinær meterstokk 1-2 meter, mens det minste er omtrent en millimeter, avhengig av hvor god meterstokken er. Det gir et dynamisk område på tre størrelsesordener. I en del sammenhenger møter man også definisjoner av dynamisk område hvor det inngår krav til hvor nøyaktig og presist man kan måle den minste endringen, for eksempel kan dette være oppgitt som dynamisk område med en usikkerhet på X %. Når man oppgir et dynamisk område, er det derfor viktig å presisere hvilke krav man stiller til det dynamiske området.

Dette er viktig i mange sammenghenger der man trenger stor nøyaktighet og presisjon i måling både av en stor størrelse og av de små fluktuasjonene omkring middelverdien. En 16 bits AD-omformer kan sies å ha et følsomhetsområde på 4 1/2 størrelsesordener, fra $2^0 = 1$ til $2^{16} = 65536$. Men fordi presisjonen til instrumentet gjerne er dårlig i siste siffer så tilsvarer ikke dette det dynamiske området. Dersom du ønsker en usikkerhet på bedre enn 1% på alle målinger vil en 16 bits AD-omformer bare ha et dynamisk område på 2-3 størrelsesordner.

I denne oppgaven skal vi prøve ut og forsøke å forbedre det dynamiske området til forskjellige vekter. Vekten skal kunne måle små masser på under 1 g og store masser opp til ca. 2 kg. Den skal også kunne måle små avvik (<1 g) fra store masser. Dere skal bruke tre prinsipper for å måle masse i denne oppgaven:

1. Elastisk deformasjon
2. Harmonisk oscillator
3. Balanseprinsippet

II. LABORATORIEPPGAVER

- Alle gruppene skal beregne følsomhet og dynamisk område for hver av de tre målemetodene. Labplassen deres er utstyrt for alle oppgavene. Alle gruppene skal gjennomføre alle deloppgavene A, B og C.
- Hver gruppe skal velge én av de to første metodene (elastisk deformasjon eller harmonisk oscillator), videreutvikle den og prøve å oppnå så stort dynamisk område, følsomhet og nøyaktighet som mulig. Premie til den gruppen som dokumenterer at de har laget vekten med størst dynamisk område.
- I oppgave C skal dere bruke en balansevekt. Vi har ikke mange nok av disse vektene til at alle gruppene kan ha hver sin, så om du sitter ved et bord med to grupper og bare én vekt, må dere avtale hvilken av gruppene som bruker vekten først. Det er ingenting i veien for å gjøre oppgave C først, før dere begynner på A og B.

Kalibreringslodd Vi har kjøpt inn 4 sett kalibreringslodd. Disse følger såkalt OIML-standarden og er av klasse M1. Iflg. NIST (http://ts.nist.gov/WeightsAndMeasures/caqmass.cfm) tilsvarer dette ASTM klasse 5 som finnes på fronter (eller vortex) i tabellform. Disse kalibreringsloddene må behandles forsiktig så de ikke endrer vekt over tid:

- **Bruk hansker for å unngå å sette fingermerker.**
- **Bruk pinsett med plasttupp for å unngå å ripe.**
- **Sett aldri loddet på en skitten flate.**

A. Elastisk deformasjon

I denne oppgaven skal ei bladfjær spennes opp på aluminiumsklossen på benken slik at fjæra beveger seg vertikalt. Spør en veileder hvis du er i tvil om hvordan det skal gjøres.

- Begynn med m=2 kg masse og mål utslaget, l, med måleur. Bruk databladet for måleuret og observer stabiliteten for å anslå presisjonen i avlesningen. Hvis dere antar at utslaget er proporsjonalt med massen, hva blir følsomheten til vekten?
- Kalibrer vekten ved hjelp av de 4 kalibreringsloddene og måleuret. Prøv å få til så mange forskjellige målepunkter som mulig ved å kombinere loddene, lån eventuelt lodd fra andre sett i tillegg for å få flere punkter. Tegn en kalibreringskurve og tilpass en empirisk kalibreringsmodell på formen $l = a + b \cdot m$.
- Bruk fjærvekten med kalibreringskurve til å veie aluminiumsloddet dere brukte som pendel i øving 1 og angi nøyaktighet og presisjon.
- Legg en liten ekstra masse (så liten som dere anslår at dere kan måle) til aluminiumsloddet og angi usikkerheten i målingen av denne vektendringen. Hva vil dere si er vektens dynamiske område?

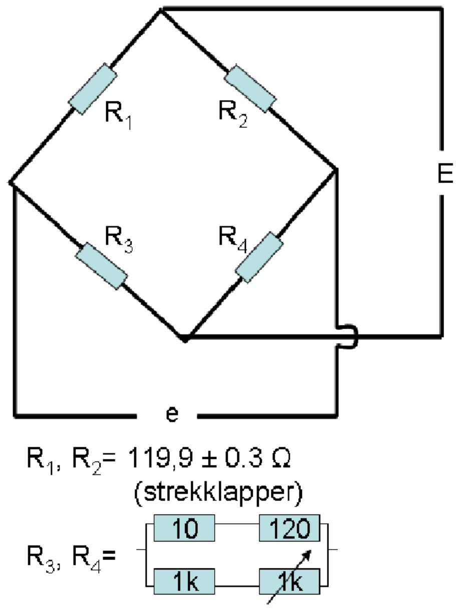

FIG. 1: Wheatstone-bro for måling av små endringer i motstanden i strekklappene R_1 og R_2. Den målte spenningen, e, avhenger av motstandene i broa og den påtrykte spenningen, E, som $e = E(R_4/(R_2 + R_4) - R_3/(R_1 + R_3))$. Broa "balanseres" ved at de variable motstandene i R_3 og R_4 stilles til $e = 0$.

a. Videreutvikling Her er to målemetoder å velge mellom:

- Refleksjon av laserstråle. Spenn opp laserpekeren for å få en refleks på en vegg. Heng opp et ark på veggen og mål.
- På hver sin side av bladfjæra er det limt fast en strekklapp. Strekklappene har en motstand på omtrent 120 Ω og motstanden øker når de strekkes og minsker når de komprimeres. Koble motstandene sammen som vist i Figur 1 og balanser broen. Sett en spenning over broen og mål ubalansen vha. multimeter. Dersom dere ønsker å forbedre følsomheten ytterligere kan dere

bruke AD- og DA-omformeren til å lage en lock-in-forsterker (se Appendiks).

B. Harmonisk oscillator

I denne oppgaven skal ei bladfjær spennes opp på aluminiumsklossen på benken slik at fjæra svinger horisontalt med aluminiumsloddet dere brukte som pendel i øvelse 1 i enden. Spør en veileder hvis du er i tvil om hvordan det skal gjøres.

- Mål svingeperioden, τ, med stoppeklokke. Basert på din presisjon i bruk av stoppeklokke, hva er presisjonen til den målte perioden?
- Massen, m, til aluminiumsloddet spent opp på fjæra er omtrent 2 kg. Bruk formelen for perioden til en harmonisk oscillator

  $$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{2}$$

  der k er fjærkonstanten, til å anslå hvor små masseendringer, Δm du kan måle.
- Finn en gjenstand med masse omtrent lik Δm, fest den på loddet med en tape og mål svingeperioden igjen. Bruk denne målingen til å bestemme massen til gjenstanden du festet på loddet, ut fra at loddets masse er uendret. Hva blir presisjonen til den målte vektendringen?

a. Videreutvikling Her er to målemetoder å velge mellom:

- Bruk fotodioden dere brukte i øving 1 til å måle svingeperioden. Finn beste plassering av dioden og hvordan best reflektere lyset. Skriptet dere brukte sist må kanskje modifiseres litt.
- Bruk strekklappene beskrevet ovenfor og mål den kontinuerlig varierende balansen i målebroen vha. AD-omformeren for å finne svingeperioden. Bruk et multimeter til å balansere broen best mulig (hvilket vil si at du måler en spenning nær null) før du utfører målingen. Bruk skriptet `AI_FFT_2012.m` til å ta opp data og gjøre FFT for å finne frekvensen.

C. Balanseprinsippet

Her skal dere bruke en balansevekt.

- Sjekk avlesningen på vekten ved hjelp av de 4 kalibreringsloddene.
- Vei aluminiumsloddet dere brukte som pendel i øving 1 og angi nøyaktighet og presisjon.
- Legg 1 g ekstra til aluminiumsloddet og angi usikkerheten i målingen av denne vektendringen. Hva vil dere si er vektens dynamiske område?

III. PRELABOPPGAVER

Kort informasjon

Disse oppgavene må løses før dere skal på laben. Besvarelsen skal leveres som en pdf **på Fronter**.

Dere vil trenge noen datasett for å gjøre beregningene i oppgavene under. Disse finner dere på samme sted som dere fant denne oppgaveteksten.

Du trenger følgende filer til disse oppgavene:

- maalinger_deformasjon.dat
- gen_osc.m
- Vbro.mat

Oppgavene

Når du løser prelaboppgave 1 og 2, bør du skrive en matlabfunksjon `[A,dA]=dinfunksjon(x,y)` , som gir svarene du trenger til å løse både oppgave 1 og 2. Dette skriptet *skal* du ta med på labdagen, og du *bør* ta vare på det til senere bruk. Det vil spare deg litt tid senere i kurset.

1. I datasettet 'maalinger_deformasjon.dat' finner du et målesett som kan tenkes å være fra en kalibrering dere skal gjennomføre i laboppgave A (punkt 2). Første kolonne er massen m [kg] til loddet, andre kolonne er utslaget h til måleuret [mm]. Last målesettet inn i matlab, lag et skript som lager en lineærtilpasning $h(m) = \alpha m + \beta$, til målepunktene $h_i(m_i)$. Hva blir responskonstanten α til vekten? *Hint:* Bruk ligningene på side 39 i Squires.
   2 poeng
   A. $\alpha = -3.16\,\mathrm{mm/kg}$
   B. $\alpha = -3.25\,\mathrm{mm/kg}$
   C. $\alpha = -3.44\,\mathrm{mm/kg}$
   D. $\alpha = -3.59\,\mathrm{mm/kg}$

2. Hva blir usikkerheten i stigningstallet ($\Delta\alpha$) du fant over? *Hint:* Igjen: Bruk ligningene på side 39 i Squires. Du kan anta at usikkerheten i massen til loddene er neglisjerbar. Skal du skrive en rapport fra forsøket bør du imidlertid reflektere rundt dette.
   2 poeng
   A. $\Delta\alpha = 0.07\,\mathrm{mm/kg}$
   B. $\Delta\alpha = 0.09\,\mathrm{mm/kg}$
   C. $\Delta\alpha = 0.11\,\mathrm{mm/kg}$
   D. $\Delta\alpha = 0.13\,\mathrm{mm/kg}$

3. På labdagen skal dere som nevnt gjennomføre en kalibering slik som i oppgavene dere nettopp har gjennomført, og bruke resultatet til å måle massen til en aluminiumskloss. Vi antar at massen til klossen er

rundt 2 kg. Kan du se noen svakheter ved målesettet som du brukte i oppgave 1 og 2? Hva bør dere gjøre annerledes?
2 poeng

A. Målesettet i oppgave 1 og 2 er godt egnet til å kalibrere vekten til vårt formål.
B. Det er mange kalibreringspunkter for $m < 0.5\,\mathrm{kg}$, men kun et punkt rundt 2 kg. Vi bør ha flere kalibreringspunkter i nærheten massen vi planlegger å måle.
C. Distribusjonen av kalibreringspunktene er ikke så viktig, men vi bør ha flere målepunkter totalt.

4. I laboppgave B bruker dere prinsippet om en harmonisk oscillator til å beregne masse. Anta at du måler periodetiden τ ti ganger, og at du ender opp med disse målingene: $\tau = \{4.12,\ 4.04,\ 4.16,\ 4.02,\ 4.03,\ 4.04, \ldots\ 3.89,\ 4.2,\ 4.12,\ 4.05\}$ [s]. Massen til loddet som er spent fast i fjæra er 2.0 kg. Bruk ligning 2 til å beregne fjærkonstanten k .
2 poeng

A. $k = 3.1\,\mathrm{N/m}$
B. $k = 3.8\,\mathrm{N/m}$
C. $k = 4.8\,\mathrm{N/m}$
D. $k = 5.1\,\mathrm{N/m}$

5. Bruk fjærkonstanten k du fant i forrige oppgave, sammen med den statistiske usikkerheten i τ, til å finne den minste masseendringen δm det bør være mulig å måle med denne metoden. *Hint:* bruk ligning 3.21 i Squires til å finne $\Delta\tau = \sigma_m$. Bruk deretter ligning 2 i oppgaveteksten for å finne δm
2 poeng

A. $\delta m = 27\,\mathrm{g}$
B. $\delta m = 34\,\mathrm{g}$
C. $\delta m = 38\,\mathrm{g}$
D. $\delta m = 51\,\mathrm{g}$

Med følsomhet mener man den minste enheten man klart kan observere med et måleinstrument, hvilket vil si at større følsomhet gjør at den minste enheten blir mindre. Dette henger sammen med usikkerheten i målingen. Endringer som er mindre enn målingens usikkerhet, kan man ikke med sikkerhet si at er faktiske endringer i den målte verdien. Legg merke til at følsomheten til et måleinstrument kan være forskjellig avhengig av hvor store verdier man måler.

6. I forrige laboratorieoppgave brukte du en digital laseravstandsmåler. I normale lysforhold er usikkerheten i målinger med denne avstandsmåleren oppgitt til ± 2 mm. Du måler en avstand til å være 22.416 m. Hva er følsomheten?
2 poeng

A. 12 mm
B. 5 mm
C. 2 mm
D. 1.8 cm
E. 4 cm

7. I sterkt lys er avstandsmåleren oppgitt til å ha en usikkerhet på $\pm(2\mathrm{mm} + 0,05\%)$. Utendørs en solskinnsdag måler du en avstand til å være 20.712 meter. Hvor stor blir følsomheten i dette tilfellet?
2 poeng

A. 1.4 mm
B. 2 mm
C. 1.2 cm
D. 2 cm
E. 4 cm

Dynamisk område vil si hvor godt et instrument kan måle både store verdier nøyaktig og små variasjoner rundt store verdier presist. Dette oppgis som et antall størrelsesordener mellom den største verdien man er i stand til å måle med et instrument, og den minste endringen man samtidig kan observere, som altså er instrumentets følsomhet i det gitte måleområdet.

8. Hvor stort dynamisk område vil du si at laseravstandsmåleren i forrige oppgave har i de to oppgavene?
2 poeng

A. Henholdsvis 4 og 3 størrelsesordener
B. Henholdsvis 3 og 2 størrelsesordener
C. Henholdsvis 3 og 4 størrelsesordener
D. 3 størrelsesordener i begge tilfeller
E. 4 størrelsesordener i begge tilfeller

9. Nå skal dere skrive et skript som kan (med mindre endringer) legges til på slutten av 'les_2osc'-skriptet for å beregne ubalansen i broen. I filen 'Vbro.mat' ligger et signal som vi kan tenke oss er tatt opp med skriptet 'les_2osc'. Last 'Vbro.mat' inn i matlab og plot signalet. Her er noen ting dere må legge inn i skriptet dere skriver:

- sampleraten er 1000 Hz;
- amplituden til den påtrykte spenningen E er 5 V;
- frekvensen til den påtrykte spenningen E er 10 Hz.

Dere skal skrive et skript som beregner forholdet mellom effektivverdien av e og E (figur 1), og som dermed er et mål på ubalansen i broen (og bør være proporsjonalt med utslaget til fjæra). For å gjøre dette bruker dere fft-algoritmen i matlab for å finne frekvenspekteret til det målte signalet. Dere skal så fjerne alle frekvenser som ikke ligger i nærheten av frekvensen på det påtrykte signalet. Dette kan gjøres

ved å gange med en filtreringsfunksjon, og da brukes gjerne en Gauss-kurve. Bruk et standardavvik på 5% av påtrykt frekvens. Konverter deretter signalet tilbake til et vanlig tidvarierende signal med ifft, og finn effektivverdien av signalet (Det kan være nødvendig å tvinge matlab til å behandle frekvenspekteret som symmetrisk ved tilbaketransformering for å få et reelt signal tilbake). Beregn deretter forholdet $relV = e/E$, hvor e er RMS-verdien til det filtrerte signalet og E er RMS-verdien til den påtrykte spenningen. Hva finner du? NB: skriptet du lager skal lastes opp på Fronter, i tillegg til at du skal ha det med deg på labdagen.
4 poeng

A. $relV = 0.05$
B. $relV = 0.1$
C. $relV = 0.15$
D. $relV = 0.20$
E. $relV = 0.25$

IV. UTSTYRSLISTE

- Kalibreringslodd
- Pinsett og hansker
- Bladfjær
- Aluminiumskloss
- Måleur
- Laserpeker
- Wheatstonebro
- AD-omformer
- Fotodiode
- Spenningskilde
- Balansevekt
- Stoppeklokke

Appendix A: Lock-in forsterker

For å redusere støy i et signal $V(t)$ bruker man ofte filtere som undertrykker alle andre signaler enn det man ønsker å måle. Det første man må gjøre da er å gi signalet en "signatur" så man kan skille støy og signal. Den enkleste måten å gjøre det på er å velge en sinusbølge med en enkelt frekvens, f som signalfrekvensen. For å måle utslaget på en målebro vil man da variere den påtrykte spenningen $E(t) = E_0 \sin 2\pi ft$. Da vet man at ubalansen i broen også vil variere som $e(t) = e_0 \sin 2\pi ft + \phi$. Poenget nå er å undertrykke alle målinger som ikke varierer med frekvensen f. Den aller mest effektive metoden er å multiplisere det støyete signalet $V(t) = e(t) + V_{stoy}$ med en sinusbølge med samme frekvens og intergrere:

$$X = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sin(2\pi ft')V(t')dt \quad \text{(A1)}$$

$$Y = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos(2\pi ft')V(t')dt \quad \text{(A2)}$$

$$e_0 = 2\sqrt{X^2 + Y^2}. \quad \text{(A3)}$$

Dette kan dere enkelt gjøre ved å bruke en funksjonsgenerator til å generere en tidsvarierende spenning (sinus) over broen og måle ubalansen med AD-omformeren. Bruk scriptet `les_2osc*.m` til å gjøre målingene og skriptet `lockin.m` til å analysere dataene med lock-inteknikken.

[1] Meget presise elektroniske Mettler-vekter måler strømmen i en spole som skal til for å holde vektskåla (som hviler på en magnet) i ro på riktig nivå.

[2] Følsomhet tilsvarer "sensitivity" på engelsk.